Şerban Țițeica

Modificarea rezistenței electrice a metalelor în câmp magnetic

Editura
Horia Hulubei

Șerban Țițeica

Modificarea rezistenței electrice a metalelor în câmp magnetic

Șerban Țițeica

Modificarea rezistenței electrice a metalelor în câmp magnetic

Volum consacrat aniversării a 110 ani

de la nașterea savantului

Editura Horia Hulubei

București - Măgurele, 2018

Prezentare grafică: Tóth Erzsébet

Editor: Victor Bârsan

Layout: Radu Dragomir

ISBN 978-606-94603-1-3

E-mail: editura.hh@gmail.com

Editura Horia Hulubei este încorporată Catedrei UNESCO a Fundației Horia Hulubei.

Cuprins

Cuvânt preliminar

Scopul prezentului volum este introducerea în circuitul ştiinţific de limbă engleză şi de limbă română a tezei de doctorat a lui Şerban Ţiţeica, apărută în germană în anul 1935. Publicată într-o perioadă în care germana era încă *lingua franca* a comunităţii fizicienilor, teza s-a bucurat de o circulaţie largă, în special în elita teoreticienilor solidişti. În România, facsimilul tezei a fost inclus în volumul editat în 2008, la aniversarea centenarului naşterii savantului [1]. Întrucât lucrările ştiinţifice care nu sunt disponibile în engleză au şanse mici de a fi citite de cercetătorii zilelor noastre, şi întrucât teza este încă citată, mai ales de autori germani, am considerat oportună punerea în circulaţie a traducerii sale în limba care domină, acum, la nivel planetar, comunicarea. Am considerat totodată adecvat să folosim această acţiune de internaţionalizare a tezei pentru a prezenta şi versiunea ei în limba română.

Volumul cuprinde şi principalul articol, semnat de Alexandru Aldea şi Ladislau Bányai, care conţine o prezentare modernă a tezei şi menţionează câteva dintre valorizările sale.

Împrejurările realizării tezei

...sunt descrise astfel în *Cuvântul introductiv* al volumului aniversar din 2008 [2]:

"Un moment decisiv în evoluţia lui Şerban Ţiţeica a fost întâlnirea lui cu Enrico Fermi, care a ţinut trei conferinţe de fizică atomică la Universitatea din Bucureşti, în 1929. Aflând de intenţia proaspătului licenţiat - în ştiinţe fizice şi chimice şi în ştiinţe matematice - de a se iniţia în mecanica cuantică, recent elaborată, Fermi i-a sugerat să continue studiile cu unul dintre principalii ei creatori, Werner Heisenberg: acesta era *illo tempore* tânăr profesor la Departamentul de matematică şi ştiintele naturii al Facultăţii Filosofice a Universităţii din Leipzig. Aşa se face că, începând din noiembrie 1930, Şerban Ţiţeica frecventează cursuri de matematică şi fizică la Universitatea din Leipzig [3], necesare pentru doctorat. În paralel cu studiile aprofundate de specializare (1930 - 1934), a pregătit teza de doctorat rezolvând o dificilă problemă de fizică statistică a stării solide propusă de Heisenberg. Importante în această cercetare au fost numeroasele discuţii cu Werner Heisenberg şi Felix Bloch. În iulie 1934, prezintă disertaţia *Über die Widerstandsänderung von Metallen im Magnetfeld*, care este apreciată cu nota II (*gut*, echivalent cu *Cum laude*) în referatele profesorilor Werner Heisenberg şi Friedrich Hund. La 31 iulie 1934 susţine examenul oral de doctorat cu profesorii Werner Heisenberg (Fizică), Bartel Leendert van der Waerden (Matematică) şi Ludwig Weickmann (Geofizică): toţi trei îi dau cel mai înalt calificativ, anume I (*ausgezeichnet*= excelent, eminent). Sunt semnificative aprecierile examinatorilor Heisenberg (Ausgezeichnete, völling klar verstandene Kentnisse = cunoştinţe excelente, înţelese cu deplină claritate) şi van der Waerden (Sehr gute, völling klar verstandene und geschickt angewandte Kentnisse = cunoştinţe foarte bune, înţelese cu deplină claritate şi abil aplicate). După acceptarea disertaţiei la 15 decembrie 1934, ea a fost publicată integral în revista *Annalen der Physik (Leipzig)*, 5. Folge, **22**, 129 - 161, 1935, iar Facultatea Filosofică a Universităţii din Leipzig i-a conferit lui Şerban Ţiţeica, la 15 martie 1935, titlul de *Doktor der Philosophie*."

Prezentare succintă a tezei

Într-un memoriu de titluri şi lucrări din 1937, Şerban Ţiţeica îşi rezumă teza astfel:

"În această lucrare mă ocup cu teoria electronică a variaţiei rezistenţei electrice a unui metal supus unui câmp magnetic. O atare variaţie era de mult cunoscută experimentatorilor, cari dovediseră că, cel puţin pentru câmpuri magnetice slabe, ea e proporţională cu pătratul câmpului. Teoriile cunoscute în literatură explicau calitativ această variaţie. Experienţele lui Kapitza din 1928, făcute cu câmpuri magnetice foarte intense, au arătat însă că pentru astfel de câmpuri variaţia rezistenţei e proporţională cu câmpul, şi că efectul longitudinal e de acelaşi ordin de mărime cu cel transversal. Teoriile cunoscute neputând explica aceste rezultate, am luat ca punct de plecare pentru lucrarea mea un efect neglijat în lucrările mai vechi: quantificarea orbitelor electronice ale unui electron supus unui câmp magnetic. Am dovedit că în acest mod se pot explica complet rezultatele lui Kapitza.

Aparatul matematic întrebuinţat în lucrare este cel obişnuit în mecanica statistică quantică: integrarea ecuaţiei lui Schrödinger prin metoda lui Dirac, pentru a obţine probabilităţile de tranziţie între diferitele stări quantice, apoi rezolvarea ecuaţiei de continuitate a statisticei lui Fermi, pentru a obţine distribuţia în regim staţionar pe nivele de energie. Când câmpul magnetic tinde către zero, spectrul discret tinde către un spectru continuu, iar sumele extinse la întreg spectrul discret tind către integralele extinse asupra spectrului continuu. Deosebirea dintre sumă şi integrală, dată prin restul formulei sumatorii a lui Euler, conţine efectul quadratic menţionat mai sus. Când câmpul magnetic devine foarte mare, singur termenul întâi din serie rămâne important şi se obţine legea lineară descoperită de Kapitza. De asemenea quantificarea nedepinzând de orientarea câmpului magnetic faţă de curent, teoria conţine şi explicaţia celui de-al doilea rezultat al lui Kapitza."

"Personajele" tezei

"Personajele" tezei - autorii celor 14 titluri ale bibliografiei, precum şi cei cărora Ţiţeica le adresează mulţumiri - reprezintă nume sonore ale fizicii. Sommerfeld, Frank şi Peierls sunt cercetători care propuseseră teorii ale magnetorezistivităţii metalelor, aflate, din păcate, în dezacord cu datele experimentale. Bloch propusese o teorie corectă, care însă nu trata cazul general. Landau şi Teller - în două articole separate - studiaseră diamagnetismul gazului de electroni, în cadrul mecanicii cuantice. Kapiţa şi Grüneisen furnizaseră date experimentale recente referitoare la magnetorezistivitate şi fizica metalelor - primul, ca savant sovietic invitat în laboratoarele lui Rutherford; al doilea, ca savant german lucrând în laboratoare germane. Heisenberg, conducătorul ştiinţific al tezei, era (şi a rămas) cel mai tânar laureat Nobel: primise premiul la doar 32 de ani. Ţiţeica se afla la Leipzig în momentul decernării. Bloch, căruia Ţiţeica îi mulţumeşte pentru "nenumărate discuţii", avea să primească şi el premiul

Nobel, ca şi Landau.

"Frumoşii ani" ai mecanicii cuantice, când cercetători eminenţi lucrau împreună, indiferent de apartenenţa etnică şi de ţara de origine, se apropiau de sfârşit. Kapiţa şi Landau nu mai pot părăsi Uniunea Sovietică; totodată, nazismul devine tot mai radical, iar savanţii evrei, a căror contribuţie la dezvoltarea mecanicii cuantice fusese decisivă, părăsesc, aproape toţi, Germania.

Ştiinţa mai reprezintă totuşi un liant. Un exemplu, printre multe altele: teza lui Ţiţeica este citată în două articole ale lui Sommerfeld (1935); în teoria ionosferei a lui Majumdar (1937); de Hund, în contextul magnetorezistivităţii; de Davîdov şi Pomeranciuc, pentru explicarea efectului Şubnikov - de Haas (1937).

Însă războiul avea nu doar să-i izoleze pe fizicieni, ci să-i arunce în tabere adverse: pe Teller, în proiectul nuclear american; pe Kapiţa şi Landau, în cel sovietic; pe Heisenberg, în cel german. După război, Teller va deveni "părintele bombei cu hidrogen" americane, iar Landau va primi premiul Stalin, în 1949 şi 1953, pentru contribuţiile sale la realizarea armelor nucleare, în special pentru calcularea foarte precisă a undei de şoc produse de explozia bombei cu hidrogen sovietice.

Două dintre "personajele" tezei au o oarecare legătură biografică cu România. Kapiţa era pe jumătate român, tatăl său fiind basarabean - Căpiţă (şi pe jumătate polonez). Kapiţa vorbea româneşte, şi l-a învăţat româneşte şi pe fiul său, Serghei, un valoros fizician şi popularizator al ştiinţei - lucru rar atât în imperiul ţarist, cât şi în Uniunea Sovietică. Kapiţa şi Ţiţeica s-au întâlnit după război, în cadrul cooperării ştiinţifice româno-sovietice, iar Kapiţa a vizitat România.

În fine, Teller, a cărui bunică maternă era originară din Banat, a petrecut câteva luni la Lugoj, în 1919, când situaţia din Budapesta natală era dramatică [5].

Valorizarea ştiinţifică a tezei

Teza continuă să acumuleze citări în articole şi publicaţii ştiinţifice de prim rang. Lista citărilor inclusă în prezentul volum este alcătuită de domnul Prof. Dr. Tudor A. Marian; ea cuprinde 211 lucrări, completând lista celor 178 de citări colectate în [1].

Un interes special îl prezintă articolul *The transverse magnetoresistance in high magnetic fields as a hopping conduction problem*, de Alexandru Aldea şi Ladislau Bányai, care oferă o expunere modernă a teoriei magnetorezistivităţii transversale dezvoltată în teză şi legătura acesteia cu transportul de hopping, apărută iniţial în [6], şi republicat acum, cu amabilul acord al autorilor.

Notă asupra ediţiei

Volumul conţine traducerea din germană în română a tezei, realizată de Dr. Maria Ţiţeica, şi traducerea din română în engleză, realizată de editor (VB). Cum am menţionat deja, au fost incluse o expunere modernă a unei părţi din teză şi o listă de lucrări care citează teza. Tehnoredactarea în Latex a fost realizată, cu competenţă şi disponibilitate, de către Dr. Radu Dragomir.

S-a încercat ca traducerile să reflecte, cât mai fidel, originalul. O chestiune delicată a constituit-o faptul că, în teză, atât rezistenţa electrică, cât şi rezistivitatea sunt denumite la fel - "rezistenţă"; în versiunea engleză, am menţinut termenul ("resistence"); în cea română, l-am înlocuit, când sensul o cerea, cu "rezistivitate". Am corectat, de asemenea, o greşală de numerotare a formulelor: notaţiile (18a), (18b) apăreau de două ori în articolul original; de asemenea, câteva greşeli de culegere (definirea "marginilor" referitoare la sumandul din ecuaţia anterioară relaţiei (30); indicele primei funcţii I din relaţia (37), aşa cum apare în Secţiunea 8; indicele t din membrul drept al relaţiei (29), aşa cum apare în Secţiunea 10) - aproape inerente în transcrierea unor formule atât de complicate, cum sunt cele din teză, reduse apoi cvasi-miraculos la expresiile simple din Secţiunea 10. Numele unuia dintre "personajele tezei" apare "Kapiţa" în textul scris în româna actuală; "Kapitza" în textul scris de Ţiţeica în 1937 şi în traducerea engleză; şi "Kapitsa" în bibliografia iniţială a tezei.

Trebuie menţionat în mod special sprijinul deosebit de generos şi competent primit de la domnul Prof. Dr. Ladislaus Bányai, care a făcut numeroase corecturi şi sugestii utile.

Editorul îşi exprima totodată recunoştinţa faţă de persoanele care l-au sprijinit în diferite etape ale pregătirii volumului de faţă, anume (în ordine alfabetică): Prof. Dr. Tudor A. Marian, Prof. Dr. Vladimir A. Protopopescu, Dr. Maria Someşan, Dr. Maria Ţiţeica.

Last but not least, Editura Horia Hulubei este deosebit de îndatorată doamnei Tóth Erzébet, pentru prezentarea grafică a lucrării.

Referinţe şi note

[1] Şerban Ţiţeica: Articole ştiinţifice, volum apărut în seria "Restituiri" a Editurii Academiei Române, editor: Tudor A. Marian, Bucureşti, 2008

[2] Tudor A. Marian: Cuvânt introductiv, în [1], p. XIII.

[3] O imagine a Universităţii din Leipzig, aşa cum arăta în timpul studiilor doctorale ale lui Ţiţeica, este reprodusă pe coperata prezentului volum, după o carte poştală de epocă (vezi de asemenea https://en.wikipedia.org/wiki/Leipzig_University#/media/File:Leipzig_-_Universit%C3%A4t.jpg). În timpul războiului, clădirea a fost bombardată de aviaţia aliată şi distrusă în proporţie de 60% (iar fondul de carte, în proporţie de 70%); ulterior (1968) a fost demolată. Vezi de exemplu articolul "Leipzig University" în Wikipedia.

[4] Şerban Ţiţeica: Memoriu de titluri şi lucrări, Tipografia Bucovina, Bucureşti, 1937, republicat în [1], p. 90

[5] http://redesteptarea.ro/edward-teller-parintele-bombei-cu-hidrogen-a-copilarit-pe-malul-timisului/

[6] Topics in theoretical physics: a volume dedicated to Şerban Ţiţeica at his 70th anniversary, Editor: Central Institute of Physics, March 1978, Măgurele

Victor Bârsan

Asupra modificării rezistenţei metalelor în câmp magnetic

Teză de doctorat aprobată de Departamentul de Matematică şi Ştiinţele Naturii al Facultăţii de Filosofie a Universităţii din Leipzig (1934)

Şerban Ţiţeica

1 Introducere

De multă vreme este cunoscut faptul următor: câmpul magnetic exercită o influenţă asupra rezistenţei conductorilor metalici, iar modificarea rezistenţei, cel puţin pentru valori mici ale câmpului magnetic, depinde pătratic de câmp. Acest efect poate fi explicat calitativ foarte simplu: câmpul magnetic provoacă o curbare a traiectoriei electronului şi altfel o lungire a drumului pe care electronul trebuie să-l parcurgă pentru a ajunge de la un punct anumit la un altul, traversând reţeaua. Dar o lungire a drumului parcurs înseamnă o mărire a numărului de ciocniri cu reţeaua, aşadar o creştere a rezistenţei. Deoarece efectul trebuie să fie independent de sensul câmpului magnetic, dezvoltarea după puteri a intensităţii câmpului magnetic conţine numai puteri pare şi pentru câmpuri magnetice slabe, seria poate fi tăiată după termenul pătratic.

Pentru această aproximaţie, aplicarea cantitativă a teoriei şi calcularea coeficienţilor nu sunt dificile. Problema a fost tratată de Sommerfeld [1], cu luarea în consideraţie a degenerării gazului de electroni. Dacă însă comparăm această teorie cu experimentul, teoria intră în mare dificultate, deoarece, în primul rând, conform acestei teorii, un câmp magnetic paralel cu curentul electric nu ar trebui să aibă nici o influenţă asupra rezistenţei; dar experimental efectul câmpului longitudinal este, dimpotrivă, nu numai prezent, dar de acelaşi ordin de mărime cu cel al câmpului transversal. În al doilea rând, coeficientul calculat este mult mai mic decât cel măsurat. Este însă de subliniat că acest coeficient experimental depinde puternic de prepararea prealabilă a materialului, aşa cum a arătat Kapiţa [2]. În al treilea rând, cercetările lui Kapiţa [2] au arătat că pentru câmpuri magnetice mai intense, în locul legii pătratice este valabilă o lege lineară. Panta dreptei ce reprezintă această lege într-o diagramă, în care este reprezentată modificarea relativă a rezistenţei în funcţie de câmpul magnetic, nu depinde de prepararea prealabilă a materialului; în schimb, poziţia dreptei este foarte dependentă de aceasta.

Pentru a pune teoria în acord cu experimentul, Frank [3] a aplicat teoria lui Sommerfeld, luând în considerare riguros câmpul magnetic. Primele două dintre dificultăţile enunţate mai sus persistă şi aici, dar în ceea ce priveşte dependenţa de câmpul magnetic, Frank obţine o lege complicată, care pentru câmpuri mici conduce la legea pătratică, iar pentru câmpuri mari corespunde unei saturaţii. În apropierea punctului de inflexiune, curba se comportă aproximativ linear şi cu aceasta a crezut Frank că poate explica rezultatele experimentale ale lui Kapiţa.

Pentru a rezolva prima dificultate, Bloch [4] a încercat să ia în considerare acţiunea câmpului asupra spinului. În câmp magnetic, poziţia spinului paralel cu câmpul este privilegiată; conform principiului lui Pauli, această orientare a spinului influenţează distribuţia vitezelor electronilor, ceea ce se reflectă într-o modificare a rezistenţei. Este clar că această modificare este independentă de sensul câmpului magnetic. Calculul complet conduce la o dependenţă pătratică, dar tot cu un coeficient prea mic.

Problema este tratată şi într-o lucrare a lui Peierls [5]. Peierls îmbunătăţeşte modelul lui Sommerfeld prin luarea în considerare a forţelor din reţea. Este cunoscut faptul că funcţia de undă a unui electron în reţea (Bloch [6]) este o undă plană modulată, dar energia este o funcţie mai complicată de numerele de undă decât cea a unui electron liber. Dependenţa timpului de ciocnire (timpul dintre ciocnirile electronului cu reţeaua) de sensul câmpului este esenţială pentru modul lui Peierls de a explica modificarea rezistenţei electrice. Din această anizotropie rezultă asemănarea dintre efectul în câmp logitudinal şi efectul în câmp transversal. Deoarece despre această anizotropie nu sunt cunoscute detalii mai exacte, din teoria lui Peierls nu pot fi trase concluzii cantitative. Pentru a obţine ordinul de mărime corect al modificării rezistenţei, este obligatoriu să fie postulată o anizotropie neaşteptat de mare. Dependenţa de câmp poate fi obţinută, dar numai calitativ: pentru câmpuri mici se regăseşte legea pătratică, aşa cum este de aşteptat, iar pentru câmpuri mari se obţine o saturaţie. Experimental însă s-a găsit o saturaţie numai la semiconductori; legea lineară găsită experimental pentru conductorii obişnuiţi nu rezultă aşadar din teoria lui Peierls.

Mai există o acţiune a câmpului magnetic ce nu a fost luată în considerare până acum pentru a explica modificarea rezistenţei, şi anume cuantificarea traiectoriilor electronilor în câmp magnetic. Această cuantificare joacă un rol important în teoria diamagnetismului (Landau [7], Teller [8]) deoarece, conform teoriei cuantice, spre deosebire de teoria clasică, susceptibilitatea gazului electronic este diferită de zero. De aceea este de presupus că această cuantificare are o influenţă şi asupra rezistenţei, iar scopul lucrării de faţă este de a cerceta această influenţă.

Acţiunea unui câmp magnetic asupra electronilor legaţi în reţea este foarte dificil de tratat, însă Peierls [9] a arătat că legătura poate fi aproximată grosier, la fel ca în cazul absenţei câmpului, prin introducerea unei mase efective a electronului. Pentru calculele noastre ne vom mulţumi cu această aproximaţie; termenul spectral şi funcţiile proprii vor fi introduse ca fiind identice cu cele ale elctronilor liberi având această masă efectivă. Această simplificare a funcţiilor proprii este considerabilă, dar din păcate nu este uşor de evitat. Pentru a calcula rezistenţa mai este necesar un mod de a calcula interacţiunea electronilor cu oscilaţiile elastice ale reţelei; în acest scop vom lua în considerare o energie potenţială suplimentară a electronilor, proporţională în fiecare punct al reţelei cu variaţia locală relativă a volumului cauzată de oscilaţiile reţelei. Acest mod de abordare simplu nu este esenţial diferit de cel folosit în teoria uzuală a conducţiei. Prin compararea celor două ar putea fi dedus şi coeficientul de proporţionalitate, dar nu avem nevoie de acesta pentru cele ce urmează.

Mai mult, calculele vor fi efectuate folosind ipoteza lui Bloch, şi anume că oscilaţiile reţelei sunt în echilibru termic. Rezultatele obţinute cu această ipoteză sunt în bun acord cu rezultatele experimentale şi, de asemenea, se pot aduce şi argumente teoretice în sprijinul ideei că obiecţia lui Peierls împotriva acestei ipoteze nu este la fel de îndreptăţită pentru o reţea reală ca pentru o reţea ideală.

În fine, trebuie accentuat explicit că în cercetarea de faţă câmpul magnetic nu este tratat ca fiind o mică perturbaţie, ci este luat exact în considerare, chiar şi în aproximaţia de ordinul zero. Numai oscilaţiile elastice ale reţelei şi câmpul electric sunt tratate ca fiind perturbaţii.

2 Modificarea rezistenţei electrice în câmp magnetic transversal

În cadrul mecanicii clasice, ecuaţiile de mişcare ale unui electron ce se află sub influenţa unui câmp electric şi a unui câmp magnetic perpendicular pe cel electric sunt foarte uşor de integrat. Mişcarea paralelă cu câmpul magnetic este uniformă. Pe direcţia perpendiculară, ea este, în cazul cel mai simplu, o translaţie uniformă de-a lungul unei drepte perpendiculare pe ambele câmpuri; în cazul general i se adaugă o oscilaţie în jurul acestei drepte ca axă. În orice caz, media temporală a componentei vitezei paralele cu câmpul electric este nulă. Dacă utilizăm acest rezultat pentru problema noastră, atunci rezultă că gazul electronic nu are o componentă a curentului electric paralelă cu câmpul electric. Dacă însă acest gaz este supus influenţei mişcării termice a reţelei, atunci este posibil ca axa traiectoriei fiecărui electron să sufere o deplasare seculară şi prin aceasta să fie generat un curent electric paralel cu câmpul electric. Se poate vedea uşor că lucrurile se întâmplă într-adevăr în acest fel, dacă privim acţiunea perturbatoare a oscilaţiilor reţelei ca pe un fel de frecare şi presupunem că forţa de frecare este proporţională cu viteza şi de sens opun acesteia.

Notând cu $-\alpha$ $(\alpha > 0)$ factorul de proporţionalitate, ecuaţiile de mişcare în sistemul de coordonate care are ca axă x o paralelă la direcţia intensităţii câmpului electric F şi ca axă Oz o paralelă la direcţia intensităţii câmpului magnetic H sunt următoarele:

$$m\frac{dv_x}{dt} = -eF - \frac{e}{c}v_yH - \alpha v_x, \tag{A}$$

$$m\frac{dv_y}{dt} = \frac{e}{c}v_xH - \alpha v_y, \tag{B}$$

$$m\frac{dv_z}{dt} = -\alpha v_z.$$

În cele ce urmează vom face abstracţie de mişcarea de-a lungul axei Oz.

Mişcarea cea mai simplă, paralelă cu suprafaţa xy, este dată de

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{dv_x}{dt} = 0.$$

Se obţine imediat:

$$v_x = -\frac{eF\alpha}{\alpha^2 + \frac{e^2}{c^2}H^2}, \quad v_y = -\frac{\frac{e}{c}FH}{\alpha^2 + \frac{e^2}{c^2}H^2}.$$

Căutăm soluţia generală în forma:

$$v_x = -\frac{eF\alpha}{\alpha^2 + \frac{e^2}{c^2}H^2} + v_x', \quad v_y = -\frac{\frac{e}{c}FH}{\alpha^2 + \frac{e^2}{c^2}H^2} + v_y',$$

şi obţinem pentru A şi B ecuaţiile:

$$m\frac{dv_x'}{dt} = -\frac{e}{c}v_y'H - \alpha, \quad m\frac{dv_y'}{dt} = \frac{e}{c}v_x'H - \alpha v_y',$$

sau, pentru mărimea

$$u = v_x' + iv_y'$$

ecuaţia:

$$m\frac{du}{dt} = \left(-\alpha + i\frac{eH}{c}\right)u$$

Soluţia acestei ultime ecuaţii este

$$u = Ce^{-\frac{\alpha}{m}t}e^{i\frac{eH}{mc}t}, \quad C = \text{complex}$$

Din cauza factorului de amortizare, termenii suplimentari v_x' şi v_y' sunt neinteresanţi pentru discuţia noastră, astfel încât ne putem limita la soluţia simplă.

În primul rând observăm că componenta v_x a vitezei, deci şi componenta curentului electric proporţională cu ea, s_x, sunt diferite de zero. Rezistivitatea electrică este definită astfel:

$$\rho = \frac{s_x}{s_x^2 + s_y^2}F; \tag{1}$$

dacă frecarea este considerată mică, atunci s_x, fiind datorat frecării, este mult mai mic decât s_y şi poate fi neglijat în numitorul lui (1). Atunci (1) devine

$$\rho = \frac{s_x}{s_y^2}F.$$

Este poate interesant de observat că, în acceaşi aproximaţie, constanta lui Hall, definită în general prin

$$R = -\frac{s_y}{s_x^2 + s_y^2}\frac{F}{H}$$

devine

$$R = -\frac{1}{s_y}\frac{F}{H}.$$

În cazul absenţei frecării, problema poate fi tratată uşor şi în cadrul mecanicii cuantice, iar rezultatele sunt foarte asemănătoare celor obţinute mai sus, clasic. Dacă pornim de la potenţialul vector $A_x = A_z = 0,\ A_y = Hx$, atunci hamiltonianul problemei discutate este:

$$W = \frac{1}{2m}\left[p_x^2 + \left(p_y + \frac{eH}{c}x\right)^2 + p_z^2\right] + eFx \tag{2}$$

unde m este masa efectivă a electronului, iar $-e$, sarcina acestuia. Se vede imediat că p_y şi p_z comută cu W, astfel încât aceste mărimi pot fi considerate ca fiind numere, dacă scriem funcţiile proprii în forma:

$$f(x)\, e^{\frac{i}{\hbar}(p_y y + p_z z)}$$

Expresia pentru W poate fi atunci rescrisă astfel:

$$\begin{aligned} W &= \frac{p_x^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2}{2}\left(x + \frac{p_y}{m\omega_0} + \frac{eF}{m\omega_0^2}\right)^2 + \frac{p_z^2}{2m} - \frac{e^2F^2}{2m\omega_0^2} - \frac{eFp_y}{m\omega_0} \\ &= \frac{p_x^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2}{2}(x - x_0)^2 + \frac{p_z^2}{2m} + eFx_0 + \frac{1}{2}\frac{e^2F^2}{m\omega_0^2}; \end{aligned}$$

unde ω_0 este frecvenţa (circulară) Larmor şi

$$x_0 = -\frac{p_y}{m\omega_0} - \frac{eF}{m\omega_0^2}.$$

Din această formă pentru W se vede imediat că acel factor al funcţiei proprii care nu depinde decât de x este cunoscuta funcţie proprie $\varphi(x - x_0)$ a oscilatorului de masă m, frecvenţă ω_0 şi poziţie de echilibru x_0; dacă exprimăm acum p_x cu ajutorul lui x_0 şi p_z cu ajutorul numărului de undă corespunzător $l = p_z/\hbar$, atunci funcţiile proprii devin:

$$\psi_{n,x_0,l} = \varphi(x - x_0)\, e^{-i\frac{eF}{\hbar\omega_0}y} e^{-i\frac{m\omega_0}{\hbar}x_0 y} e^{ilz}, \tag{3}$$

iar valorile corespunzătoare ale energiei:

$$E_{n,x_0,l} = \hbar\omega_0\left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{\hbar^2}{2m}l^2 + eFx_0, \tag{4}$$

dacă nu luăm în considerare constanta aditivă

$$\frac{1}{2}\frac{e^2F^2}{m\omega_0^2}.$$

x_0 este valoarea medie a lui x; valoarea medie a componentei v_x a vitezei este de aceea derivata temporală a lui x_0. Dacă nu are loc nici o perturbaţie, atunci $v_x = 0$. Este de presupus că şi în acest caz, sub influenţa mişcării termice a reţelei, x_0 nu rămâne constant, ci se modifică cumva în timp; vom urmări acest aspect în detaliu în cele ce urmează. În acest caz, curentul electric în direcţia x poate fi calculat direct din definiţia lui: se consideră o suprafaţă perpendiculară pe axa x; atunci această componentă a curentului electric este egală cu diferenţa dintre numărul de electroni care trec în unitatea de timp din semispaţiul negativ în semispaţiul pozitiv şi numărul celor care trec din semispaţiul pozitiv în cel negativ, multiplicată cu sarcina electronului. Densitatea de curent se obţine prin împărţirea rezultatului la mărimea suprafeţei considerate.

Pentru a calcula rezistenţa electrică trebuie luat în considerare şi curentul în direcţia y. Deoarece

$$v_y = \frac{1}{m}\left(p_y + \frac{eH}{c}x\right)$$

obţinem din calculul mediei:

$$\overline{v}_y = \frac{1}{m}\left(p_y + \frac{eH}{c}\overline{x}\right) = \frac{1}{m}\left(p_y + \frac{eH}{c}\overline{x}_0\right) = -\frac{eF}{m\omega_0} \tag{5}$$

adică un rezultat care corespunde exact valorii clasice a vitezei medii perpendiculare pe ambele câmpuri. Se vede astfel că din luarea în considerare în mod sumar a legăturii nu rezultă decât efectul Hall normal.

Densitatea de curent în direcţia y este

$$s_y = \frac{e^2\nu}{mc\omega_0}F, \tag{6}$$

unde ν reprezintă numărul de electroni din unitatea de volum.

3 Interacţia cu oscilaţiile reţelei

Aşa cum a fost arătat în introducere, vom cerceta acum influenţa unei perturbaţii, a cărei energie este proporţională cu dilatarea locală volumică:

$$W' = D\,\mathrm{div}\,\overrightarrow{u}$$

unde $\overrightarrow{u}$ este deplasarea unui punct al reţelei, iar D, un factor de proporţionalitate.

Pentru a uşura calculul ponderilor statistice, este avantajos să considerăm că introducem ca domeniu de bază un cub cu muchiile paralele cu axele de coordonate, lungimea unei muchii fiind L şi să impunem ca toate proprietăţile spaţiale ale sistemului să fie periodice cu perioada L în toate direcţiile coordonatelor. Pentru funcţiile proprii ale electronului, condiţia de periodicitate în direcţia x nu poate fi riguros îndeplinită; dacă însă luăm în considerare faptul că funcţiile proprii ale oscilatorului tind exponenţial către zero când variabila spaţială tinde la infinit, putem întotdeauna alege L suficient de mare, pentru a fi mai mare decât intervalul în care aceste funcţii proprii sunt semnificativ diferite de zero, iar apoi funcţiile proprii pot fi cu uşurinţă continuate periodic. Tot din acelaşi motiv – al tendinţei exponenţiale către zero – integrarea funcţiei proprii după x, când acesta parcurge latura cubului poate fi înlocuită prin integrarea de la $-\infty$ la $+\infty$.

Din condiţia de periodicitate rezultă că numerele cuantice l şi x_0 pot avea doar valori discrete:

$$\begin{cases} l = \frac{2\pi}{L} g \quad (g \ - \text{ întreg}) \\ x_0 = -\frac{eF}{m\omega_0^2} + \frac{\hbar}{m\omega_0}\frac{2\pi}{L} g' \quad (g' \ - \text{ întreg}) \end{cases} \tag{7}$$

Descompunem mişcarea termică a reţelei în unde plane consecutive. Întrucât doar undele longitudinale provoacă o dilatare, ne vom limita numai la acestea:

$$\overrightarrow{u} = \sum \overrightarrow{u}_{\overrightarrow{f}}, \quad \overrightarrow{u}_{\overrightarrow{f}} = \frac{\overrightarrow{f}}{f}\left[b_{\overrightarrow{f}} e^{i\left(\overrightarrow{f}\,\overrightarrow{r} - \omega t\right)} + b^*_{\overrightarrow{f}} e^{-i\left(\overrightarrow{f}\,\overrightarrow{r} - \omega t\right)} \right],$$

unde $\frac{L}{2\pi}\overrightarrow{f}$ este un vector întreg şi $f = \left|\overrightarrow{f}\right|$. Aşa cum este bine cunoscut din teoria corpului solid, mărimile b sunt operatorii:

$$b^*_{\overrightarrow{f}} = \sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega}}\sqrt{N_{\overrightarrow{f}} + 1}\Delta^{(+)}_{\overrightarrow{f}}, \quad b_{\overrightarrow{f}} = \sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega}}\sqrt{N_{\overrightarrow{f}}}\Delta^{(-)}_{\overrightarrow{f}}$$

unde M este masa reţelei conţinute în cubul cu latura L, $N_{\overrightarrow{f}}$ este numărul de ocupare a oscilaţiei proprii corespunzătoare, iar $\Delta^{(+)}_{\overrightarrow{f}}$, respectiv $\Delta^{(-)}_{\overrightarrow{f}}$ sunt acei operatori care transformă $N_{\overrightarrow{f}}$ în $N_{\overrightarrow{f}} + 1$, respectiv $N_{\overrightarrow{f}} - 1$.

În cele ce urmează vom neglija dispersia undei elastice şi vom efectua calculele considerând constantă viteza de propagare a undei, astfel încât

$$\omega = wf.$$

Sub influenţa mişcării termice a reţelei, electronii vor efectua tranziţii de la o stare la alta. Deoarece perturbaţia este lineară în b, tranziţia electronului de la o stare la alta este însoţită de un salt cu o unitate al numărului cuantic al oricăreia dintre oscilaţiile proprii ale reţelei. Datorită analogiei cu teoria radiaţiei, vom numi aceste procese elementare „absorbţie” şi „emisie” a unei cuante de vibraţie.

Vom mai introduce notaţia mai scurtă q pentru numerele cuantice ale electronului. Astfel se pot calcula cu uşurinţă, în modul cunoscut, cu ajutorul metodei variaţiei constantelor, probabilităţile proceselor elementare. Probabilitatea de tranziţie în unitatea de timp pentru tranziţia $q \to q'$ şi absorbţia unei cuante de vibraţie de tipul $\overrightarrow{f}$ este dată de

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{D^2}{\hbar M\omega} f \left| \left(e^{i\left(\overrightarrow{f}\,\overrightarrow{r}\right)} \right)_{qq'} \right|^2 \frac{1 - \cos\left(\frac{E_{q'} - E_q}{\hbar} - \omega\right) t}{\left(\frac{E_{q'} - E_q}{\hbar} - \omega\right)^2} N_{\overrightarrow{f}}\ , \tag{9a}$$

iar pentru aceeaşi tranziţie şi emisie a unei cuante de vibraţie:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{D^2}{\hbar M\omega}f\left|\left(e^{-i\left(\vec{f}\,\vec{r}\right)}\right)_{qq'}\right|^2\frac{1-\cos\left(\frac{E_{q'}-E_q}{\hbar}-\omega\right)t}{\left(\frac{E_{q'}-E_q}{\hbar}-\omega\right)^2}\left(N_{\vec{f}}+1\right) \tag{9b}$$

Simbolul $(\Phi)_{q'q}$ reprezintă elementul de matrice al funcţiei din paranteză

$$(\Phi)_{q'q}=\int\Phi\psi_{q'}^*\psi_q d\tau$$

integrat peste cubul de latură L.

De aici obţinem imediat regulile de selecţie:

$$l'=l+f_z,\quad x_0'=x_0-\frac{\hbar}{m\omega_0}f_y \tag{10a}$$

pentru absorbţie, şi

$$l'=l+f_z,\quad x_0'=x_0-\frac{\hbar}{m\omega_0}f_y \tag{10b}$$

pentru emisie.

Dacă aceste reguli de selecţie sunt satisfăcute, atunci elementul de matrice este diferit de zero şi egal cu

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{if_xx}\varphi_n\left(x-x_0\right)\varphi_{n'}\left(x-x_0'\right)dx$$

sau:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-if_xx}\varphi_n\left(x-x_0\right)\varphi_{n'}\left(x-x_0'\right)dx$$

pentru o emisie, respectiv o absorbţie. Pătratul modulului este acelaşi în ambele cazuri şi va fi notat cu $W_{nn'}\left(f_x,x_0,x_0'\right)$. Aceste funcţii vor juca mai târziu un rol deosebit, de aceea vom cerceta aici mai îndeaproape proprietăţile lor cele mai importante.

Pornim de la integrala:

$$J_{nn'}=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{if_xx}\varphi_n\left(x-x_0\right)\varphi_{n'}\left(x-x_0\right)dx$$

astfel încât:

$$\left|J_{nn'}\right|^2=W_{nn'}.$$

Introducem noua variabilă de integrare t şi noua funcţie $\Phi_n\left(t\right)$:

$$t=\sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}x,\quad \Phi_n\left(t\right)=\sqrt[4]{\frac{\hbar}{m\omega_0}}\varphi_n\left(x\right).$$

Funcţiile $\Phi_n(t)$ sunt atunci funcţiile proprii normate ale problemei [funcţiile Hermite, nota editurii]:

$$\frac{d^2\ \Phi_n(t)}{dt^2} + \left(2n+1-t^2\right)\ \Phi_n(t) = 0$$

După cum se ştie, pentru această ecuaţie există o funcţie generatoare:

$$e^{-\frac{t^2}{2}+2ut-u^2} = \sum_0^\infty \sqrt{\frac{\sqrt{\pi}2^n}{n!}}\Phi_n(t)\,u^n.$$

Cu noile notaţii, $J_{nn'}$ devine:

$$J_{nn'} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}f_x t}\Phi_n\left(t-\sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}x_0\right)\Phi_{n'}\left(t-\sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}x_0'\right)dt.$$

Înmulţind cele două serii:

$$\exp\left[-\frac{1}{2}\left(t-\sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}x_0\right)^2 + 2u\left(t-\sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}x_0\right) - u^2\right] = $$
$$= \sum_0^\infty \sqrt{\frac{\sqrt{\pi}2^n}{n!}}\Phi_n\left(t-\sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}x_0\right)u^n \tag{a}$$

$$\exp\left[-\frac{1}{2}\left(t-\sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}x_0'\right)^2 + 2u\left(t-\sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}x_0'\right) - v^2\right] = $$
$$= \sum_0^\infty \sqrt{\frac{\sqrt{\pi}2^{n'}}{n'!}}\Phi_{n'}\left(t-\sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}x_0'\right)v^{n'} \tag{b}$$

apoi rezultatul cu $e^{i\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}f_x t}$ şi integrând după t de la $-\infty$ la $-\infty$, obţinem o funcţie generatoare pentru funcţiile J:

$$\exp\left[2uv + \left(i\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}f_x + \sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}\left(x_0'-x_0\right)\right)\left(i\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}f_x - \sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}\left(x_0'-x_0\right)\right)\right]\cdot$$
$$\cdot\exp\left[-\frac{1}{4}\frac{\hbar}{m\omega_0}f_x^2 - \frac{1}{4}\frac{m\omega_0}{\hbar}\left(x_0-x_0'\right)^2 + \frac{i}{2}f_x\left(x_0+x_0'\right)\right] =$$
$$= \sum_0^\infty\sum_0^\infty \sqrt{\frac{2^{n+n'}}{n!n'!}}J_{nn'}u^n v^{n'}. \tag{11}$$

Din aceasta rezultă că funcţiile $J_{n'n}$ sunt egale cu funcţia exponenţială:

$$\exp\left[-\frac{1}{4}\frac{\hbar}{m\omega_0}\left(x_0-x_0'\right)^2 f_x^2 - \frac{1}{4}\frac{m\omega_0}{\hbar}f_x^2 + \frac{i}{2}f_x\left(x_0+x_0'\right)\right]$$

multiplicată cu un polinom în

$$\left(i\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}f_x+\sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}\left(x_0'-x_0\right)\right)$$

şi

$$\left(i\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}f_x-\sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}\left(x_0'-x_0\right)\right)$$

şi că $W_{nn'}=\left|J_{nn'}\right|^2$ depinde numai de mărimea:

$$\alpha^2=\frac{\hbar}{m\omega_0}-f_x^2+\frac{m\omega_0}{\hbar}\left(x_0-x_0'\right)^2=\frac{\hbar}{m\omega_0}\left(f_x^2+f_y^2\right),$$

conform regulilor de selecţie. Aşadar, pentru a obţine toţi $W_{nn'}$ în forma lor generală completă, este suficient să cercetăm $J_{nn'}$ numai în cazul special în care $f_x=0$ şi $\sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}\left(x_0'-x_0\right)=\alpha$. Pentru a obţine toţi $W_{nn'}$ nu mai este nevoie apoi decât de ridicarea la pătrat şi de înlocuirea lui α^2 cu $\frac{\hbar}{m\omega_0}\left(f_x^2+f_y^2\right)$. În acest caz special, funcţia generatoare devine:

$$F\left(u,v,\alpha\right)=e^{2uv+\alpha(u-v)-\alpha^2/4}=\sum_0^\infty\sum_0^\infty\sqrt{\frac{2^{n+n'}}{n!n'!}}J_{n'n}\left(\alpha\right)u^n v^{n'}. \qquad (11')$$

Se poate verifica uşor că funcţia F satisface următoare ecuaţie diferenţială:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial\alpha^2}+\frac{1}{\alpha}\frac{\partial F}{\partial\alpha}+\left(1-\frac{\alpha^2}{4}\right)F=$$

$$=\frac{1}{\alpha^2}\left[u^2\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}+v^2\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}-2uv\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v}\right]+\left(\frac{1}{\alpha^2}-1\right)\left(u\frac{\partial F}{\partial u}+v\frac{\partial F}{\partial v}\right).$$

Înlocuind, în această ecuaţie, funcţia F cu dezvoltarea sa în serie şi comparând coeficienţii aceloraşi puteri, obţinem pentru $J_{nn'}$ următoarea ecuaţie diferenţială:

$$\frac{d^2 J_{nn'}}{d\alpha^2}+\frac{1}{\alpha}\frac{dJ_{nn'}}{d\alpha}+\left(n+n'+1-\frac{\left(n-n'\right)^2}{\alpha^2}-\frac{a^2}{4}\right)J_{nn'}=0.$$

Mai târziu vom înlocui prin integrale sumele unor expresii în care apar $W-$urile. În acest scop este necesar să calculăm $W-$urile din această ecuaţie diferenţială cu ajutorul metodei lui Kramers. Înlocuim pătratul factorului oscilant prin valoarea sa medie şi obţinem:

$$W_{nn'}\simeq\frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{\left(n+n'+1\right)\alpha^2-\left(n-n'\right)^2-\frac{\alpha^4}{4}}}. \qquad (12)$$

Se poate constata normarea pornind de la reprezentarea:

$$W_{nn'}\left(\alpha^2\right) = W_{nn'}\left(x^2+y^2\right) =$$

$$= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixs} \Phi_n\left(s+y\right) \Phi_{n'}\left(s\right) ds \right|^2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix(s-t)} \Phi_n\left(s+y\right) \Phi_n\left(t+y\right) \Phi_{n'}\left(s\right) \Phi_{n'}\left(t\right) dsdt$$

Rezultă:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_{nn'}\left(x^2+y^2\right) dxdy = 2\pi \int_0^{\infty} W_{nn'}\left(\alpha^2\right) \alpha d\alpha \qquad (12a)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix(s-t)} \Phi_n\left(s+y\right) \Phi_n\left(t+y\right) \Phi_{n'}\left(s\right) \Phi_{n'}\left(t\right) dsdtdxdy.$$

Integrarea după x conduce, exprimată cu ajutorul simbolului lui Dirac, la rezultatul $2\pi\delta\left(s-t\right)$; integrarea după t se poate apoi efectua uşor şi se obţine pentru membrul drept al ecuaţiei (12a):

$$2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_n\left(s+y\right) \Phi_n\left(s+y\right) \Phi_{n'}\left(s\right) \Phi_{n'}\left(s\right) dsdy.$$

Datorită normării funcţiilor Φ, integrarea după y are rezultatul 1, iar apoi ultima integrală este tot 1; rămâne aşadar:

$$\int_0^{\infty} W_{nn'}\left(\alpha^2\right) \alpha d\alpha = 1$$

Însă factorul numeric din (12) este astfel ales, încât

$$\frac{1}{\pi} \int \frac{\alpha d\alpha}{\sqrt{\left(n+n'+1\right)\alpha^2 - \left(n-n'\right)^2 - \frac{\alpha^4}{4}}} = 1,$$

unde limitele de integrare sunt soluţiile pozitive ale ecuaţiei care anulează numitorul.

4 Funcţia de distribuţie staţionară

Pentru a calcula curentul, trebuie obţinută mai întâi funcţia de distribuţie staţionară. Se poate arăta uşor că funcţia Fermi

$$\chi_q = \frac{1}{\exp\left(-\frac{\varepsilon_q - E_0}{kT}\right) + 1}$$

unde ε_q este energia fără termenul cu câmp electric:

$$\varepsilon_q = \hbar\omega_0 \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar^2}{2m} l^2, \tag{13}$$

satisface această condiţie în aproximaţia în care sunt luaţi în considerare numai termeni lineari în dezvoltarea după puteri a intensităţii câmpului F.

Pentru a demonstra aceasta, trebuie calculată derivata temporală a lui χ_q. $\frac{d\chi_q}{dt}$ este egal cu numărul de electroni care trec în starea ε_q în unitatea de timp, minus numărul acelora care părăsesc această stare, în unitatea de timp:

$$\frac{d\chi_q}{dt} = \frac{D^2}{M\hbar w} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{q'} \sum_{\overrightarrow{f}} f W_{nn'} \left\{ ... \right\}$$

unde expresia dintre acolade este:

$$... = \left[\chi_{q'} \left(1 - \chi_q \right) N_{\overrightarrow{f}} - \chi_q \left(1 - \chi_{q'} \right) \left(N_{\overrightarrow{f}} + 1 \right) \right] \frac{1 - \cos \left(\frac{E_{q'} - E_q}{\hbar} + \omega \right) t}{\left(\frac{E_{q'} - E_q}{\hbar} - \omega \right)^2} +$$

$$+ \left[\chi_{q'} \left(1 - \chi_q \right) \left(N_{\overrightarrow{f}} + 1 \right) - \chi_q \left(1 - \chi_{q'} \right) N_{\overrightarrow{f}} \right] \frac{1 - \cos \left(\frac{E_{q'} - E_q}{\hbar} - \omega \right) t}{\left(\frac{E_{q'} - E_q}{\hbar} - \omega \right)^2}$$

Membrul drept se anulează pentru $F = 0$, ceea ce rezultă din staţionaritatea cunoscută a funcţiei Fermi pentru acest caz special. Membrul drept depinde de F numai prin intermediul expresiilor $E_{q'} - E_q$, aşadar F apare numai în combinaţia $eF \left(x_0' - x_0 \right)$. Termenul de ordinul întâi în dezvoltarea după puteri a lui F este aşadar produsul dintre această expresie şi o funcţie pară de $\left(x_0' - x_0 \right)$. Întrucât totul este sumat după x_0', acest termen al dezvoltării dispare şi aserţiunea noastră este demonstrată. Este important că asupra temperaturii nu a fost făcută nicio presupoziţie.

5 Curentul

Trecem acum la calcularea componentei x a curentului, conform metodei discutate mai sus (Secţiunea 2). Alegem suprafaţa $x = 0$ drept „perete”:

$$S_x = -\frac{eD^2}{M\hbar w} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{n} \sum_{n'} \sum_{l,l'} \sum_{x_0 < 0} \sum_{x_0' > 0} \sum_{\overrightarrow{f}} f W_{nn'} \cdot$$

$$\cdot \left\{ \left[\chi_q \left(1 - \chi_{q'} \right) N_{\overrightarrow{f}} - \chi_{q'} \left(1 - \chi_q \right) \left(N_{\overrightarrow{f}} + 1 \right) \right] \frac{1 - \cos \left(\frac{E_{q'} - E_q}{\hbar} - \omega \right) t}{\left(\frac{E_{q'} - E_q}{\hbar} - \omega \right)^2} + \right. \tag{14}$$

$$\left[\chi_q\left(1-\chi_{q'}\right)\left(N_{\overrightarrow{f}}+1\right)-\chi_{q'}\left(1-\chi_q\right)N_{\overrightarrow{f}}\right]\frac{1-\cos\left(\frac{E_{q'}-E_q}{\hbar}+\omega\right)t}{\left(\frac{E_{q'}-E_q}{\hbar}-\omega\right)^2}\Bigg\}.$$

Eliminăm mai întâi f_y şi f_z cu ajutorul regulilor de selecţie şi apoi înlocuim sumările după $l,\ l',,\ x_0,\ x_0'$ şi f_x prin integrări. Ponderea fiecărui element de integrare $dl,\ dl',\ df_x$ este egală cu $L/2\pi$, ponderea lui dx_0 şi dx_0' este $\frac{m\omega_0}{\hbar}\left(L/2\pi\right)$, conform ec. (7).

$$S_x=-\frac{eD^2}{M\hbar w}\left(\frac{L}{2\pi}\right)^5\left(\frac{m\omega_0}{\hbar}\right)^2\frac{\partial}{\partial t}\sum_{n,n'}\int_{x_0<0,x_0'>0}dldl'df_xdx_0dx_0'fW_{nn'}\cdot$$

$$W_{nn'}\Bigg\{\left[\chi_q\left(1-\chi_{q'}\right)N-\chi_{q'}\left(1-\chi_q\right)(N+1)\right]\frac{1-\cos\left(\frac{E_{q'}-E_q}{\hbar}-\omega\right)t}{\left(\frac{E_{q'}-E_q}{\hbar}-\omega\right)^2}+$$

$$+\left[\chi_q\left(1-\chi_{q'}\right)(N+1)-\chi_{q'}\left(1-\chi_q\right)N\right]\frac{1-\cos\left(\frac{E_{q'}-E_q}{\hbar}+\omega\right)t}{\left(\frac{E_{q'}-E_q}{\hbar}-\omega\right)^2}\Bigg\}.$$

Introducând noile variabile $u=l+l'$, $v=l-l'$, se obţine:

$$S_x=-\frac{1}{2}\frac{eD^2}{M\hbar w}\left(\frac{L}{2\pi}\right)^5\left(\frac{m\omega_0}{\hbar}\right)^2\frac{\partial}{\partial t}\sum_{n,n'}\int_{x_0<0,x_0'>0}dudvdf_xdx_0dx_0'f\cdot$$

$$W_{nn'}\Bigg\{\left[\chi_q\left(1-\chi_{q'}\right)N-\chi_{q'}\left(1-\chi_q\right)(N+1)\right]\frac{1-\cos\left(\frac{E_{q'}-E_q}{\hbar}-\omega\right)t}{\left(\frac{E_{q'}-E_q}{\hbar}-\omega\right)^2}+\qquad(15)$$

$$\left[\chi_q\left(1-\chi_{q'}\right)(N+1)-\chi_{q'}\left(1-\chi_q\right)N\right]\frac{1-\cos\left(\frac{E_{q'}-E_q}{\hbar}+\omega\right)t}{\left(\frac{E_{q'}-E_q}{\hbar}-\omega\right)^2}\Bigg\}$$

Întâi integrăm după u. Folosim caracterul de funcţie δ a fracţiilor

$$\frac{1-\cos\Omega t}{\Omega^2}$$

prin aceea că introducem pentru u, în ceilalţi factori de integrare, soluţia ecuaţiei şi că integrăm numai fracţiile. Ambii termeni conduc la acelaşi rezultat:

$$\pi t \frac{2m}{\hbar} \frac{1}{|v|}$$

Introducând acest rezultat în formula (15) şi derivând după t, obţinem:

$$S_x = -\pi \frac{m}{\hbar} \frac{eD^2}{M\hbar w} \left(\frac{L}{2\pi}\right)^5 \left(\frac{m\omega_0}{\hbar}\right)^2 \cdot$$

$$\cdot \sum_{n,n'} \int_{x_0<0,x_0'>0} dv dx_0 dx_0' df_x \left(A+B\right),$$

unde:

$$A = \frac{f}{|v|} W_{nn'} \left[\chi_q \left(1-\chi_{q'}\right) N - \chi_{q'} \left(1-\chi_q\right) \left(N+1\right)\right],$$

$$B = \frac{f}{|v|} W_{nn'} \left[\chi_q \left(1-\chi_{q'}\right) \left(N+1\right) - \chi_{q'} \left(1-\chi_q\right) N\right].$$

În A, înlocuim u cu soluţia ecuaţiei

$$E_{q'} - E_q - \hbar\omega = 0, \tag{17a}$$

iar în B, cu soluţia ecuaţiei:

$$E_{q'} - E_q + \hbar\omega = 0. \tag{17b}$$

Acum dezvoltăm S_x după puterile intensităţii câmpului electric F.

Termenul de ordinul zero dispare, întrucât în această aproximaţie $A = B = 0$. Pentru $F = 0$, ecuaţiile (17a) şi (17b) devin

$$\varepsilon_{q'} - \varepsilon_q - \hbar\omega = 0 \tag{18a}$$

$$\varepsilon_{q'} - \varepsilon_q + \hbar\omega = 0 \tag{18b}$$

Întrucât χ_q este funcţia Fermi de variabilă ε_q şi N este funcţia Planck de variabilă $\hbar\omega/kT$, anularea lui A şi B datorată relaţiilor (18a) şi (18b) poate fi verificată uşor.

Pentru a obţine termenul de ordinul întâi, înlocuim în N pe $\hbar\omega$ cu $\varepsilon_{q'} - \varepsilon_q - eF\left(x_0' - x_0\right)$, respectiv cu $\varepsilon_q - \varepsilon_{q'} + eF\left(x_0 - x_0'\right)$, şi îl dezvoltăm după $eF\left(x_0' - x_0\right)$. Primii termenii ai lui A şi respectiv B devin:

$$A_1 = \frac{f}{|v|} W_{nn'} \frac{eF\left(x_0' - x_0\right)}{kT} N\left(N+1\right)\left(\chi_{q'} - \chi_q\right) \quad \textit{num.gresita.in.orig.} \tag{19a}$$

$$B_1 = \frac{f}{|v|} W_{nn'} \frac{eF\left(x_0 - x_0'\right)}{kT} N\left(N+1\right)\left(\chi_{q'} - \chi_q\right) \quad num.gresita.in.orig. \tag{19b}$$

Factorii $N\left(N+1\right)\left(\chi_{q'} - \chi_q\right)$ mai depind, prin u, de F, dar dacă ne limităm doar la termenii de ordinul întâi în F, este nevoie doar să punem $F = 0$ în aceşti factori, aşadar să privim pe u ca soluţie a ecuaţiilor (18a), respectiv (18b), ceea ce vom face de aici înainte.

Înlocuind acum A_1 şi B_1 în formula pentru S_x şi introducând noile variabile $r = x_0' - x_0,\ s = x_0' + x_0$, se obţine:

$$S_x = -\frac{\pi}{2}\frac{eF}{kT}\frac{eD^2}{M\hbar w}\left(\frac{L}{2\pi}\right)^5\left(\frac{m\omega_0}{\hbar}\right)^2\sum_{n,n'}\int dvdrdsdf_x r\left(A_1 - B_1\right).$$

Limitele de integrare pentru integrarea după s sunt $-r$ şi $+r$, iar cele pentru integrarea după r sunt 0 şi $+\infty$. Deoarece integrandul nu depinde de s, putem efectua uşor integrarea după s:

$$S_x = -\frac{\pi}{2}\frac{eF}{kT}\frac{eD^2}{M\hbar w}\left(\frac{L}{2\pi}\right)^5\left(\frac{m\omega_0}{\hbar}\right)^2\sum_{n,n'}\int drdvdf_x r^2\left(A_1 - B_1\right).$$

Integrandul depinde numai de r^2; întrucât se integrează numai pentru valori pozitive ale lui r, putem înlocui peste tot, conform regulii de selecţie (10), pe $r = x_0' - x_0$ prin $\frac{\hbar}{m\omega_0} f_y$ şi integra după f_y de la 0 la $+\infty$:

$$S_x = -\pi\frac{eF}{kT}\frac{eD^2}{M\hbar w}\left(\frac{L}{2\pi}\right)^5\left(\frac{\hbar}{m\omega_0}\right)\sum_{n,n'}\int df_x df_y dv f_x^2\left(A_1 - B_1\right)$$

Introducând pentru suprafaţa $f_x,\ f_y$ coordonate polare:

$$f_x = f'\cos\theta, \quad f_y = f'\sin\theta$$

şi integrând după θ de la 0 la π, S_x devine:

$$S_x = -\frac{\pi^2}{2}\frac{eF}{kT}\frac{eD^2}{M\hbar w}\left(\frac{L}{2\pi}\right)^5\frac{\hbar}{m\omega_0}\sum_{n,n'}\int df' dv f'^3\left(A_1 - B_1\right)$$

Întrucât integrandul este o funcţie pară de v, putem alege ca limite de integrare 0 şi $+\infty$ şi înmulţi rezultatul cu 2. Atunci putem înlocui $|v|$ cu f_z (conform regulilor de selecţie):

$$S_x = \pi^2\frac{eF}{kT}\frac{eD^2}{M\hbar w}\left(\frac{L}{2\pi}\right)^5\frac{\hbar}{m\omega_0}\sum_{n,n'}\int df' df_z f'^3\left(A_1 - B_1\right).$$

Pentru a continua calculul, mai avem nevoie de expresiile pentru ε_q şi $\varepsilon_{q'}$, din care l şi l' sunt eliminaţi cu ajutorul regulilor de selecţie şi a legii conservării energiei.

Pentru A_1 se obţine

$$\varepsilon_q = \frac{\hbar\omega}{2}\left(n+n'+1\right)+\frac{\hbar^2}{8m}f_z^2+\frac{m}{2f_z^2}\left[\omega-\omega_0\left(n'-n\right)\right]^2-\frac{\hbar\omega}{2},$$

$$\varepsilon_{q'} = \frac{\hbar\omega}{2}\left(n+n'+1\right)+\frac{\hbar^2}{8m}f_z^2+\frac{m}{2f_z^2}\left[\omega-\omega_0\left(n'-n\right)\right]^2+\frac{\hbar\omega}{2}$$

şi pentru B_1 :

$$\varepsilon_q = \frac{\hbar\omega}{2}\left(n+n'+1\right)+\frac{\hbar^2}{8m}f_z^2+\frac{m}{2f_z^2}\left[\omega+\omega_0\left(n'-n\right)\right]^2+\frac{\hbar\omega}{2},$$

$$\varepsilon_{q'} = \frac{\hbar\omega}{2}\left(n+n'+1\right)+\frac{\hbar^2}{8m}f_z^2+\frac{m}{2f_z^2}\left[\omega+\omega_0\left(n'-n\right)\right]^2-\frac{\hbar\omega}{2}.$$

Introducem pentru simplificarea scrierii notaţiile:

$$X = \frac{1}{kT}\left\{\frac{\hbar\omega_0}{2}\left(n+n'+1\right)+\frac{\hbar^2}{8m}f_z^2+\frac{m}{2f_z^2}\left[\omega-\omega_0\left(n'-n\right)\right]^2-E_0\right\} \tag{20a}$$

$$X' = \frac{1}{kT}\left\{\frac{\hbar\omega_0}{2}\left(n+n'+1\right)+\frac{\hbar^2}{8m}f_z^2+\frac{m}{2f_z^2}\left[\omega+\omega_0\left(n'-n\right)\right]^2-E_0\right\} \tag{20b}$$

şi

$$\xi = \frac{\hbar\omega}{kT},$$

cu care curentul devine:

$$S_x = L^2\frac{D^2}{32\pi^3}\frac{e^2F}{kT}\frac{1}{\delta\hbar w\omega_0}\sum_{n,n'}\int df'df_z\frac{f'^3f}{f_z}W_{nn'}N\left(N+1\right)\cdot$$
$$\cdot\left[\frac{1}{e^{X-\frac{\xi}{2}}+1}-\frac{1}{e^{X+\frac{\xi}{2}}+1}+\frac{1}{e^{X'-\frac{\xi}{2}}+1}-\frac{1}{e^{X'+\frac{\xi}{2}}+1}\right] \tag{21}$$

unde δ reprezintă densitatea materialului: $\delta = M/L^3$. Pentru paranteza pătrată din integrand vom introduce şi notaţia K:

$$K = \frac{1}{e^{X-\frac{\xi}{2}}+1}-\frac{1}{e^{X+\frac{\xi}{2}}+1}+\frac{1}{e^{X'-\frac{\xi}{2}}+1}-\frac{1}{e^{X'+\frac{\xi}{2}}+1} \tag{22}$$

Acum putem calcula foarte uşor rezistenţa. Conform definiţiei, rezistenţa este egală cu raportul dintre componenta intensităţii câmpului electric pe direcţia curentului şi modulul densităţii curentului.

Dacă notăm cu s_x şi s_y componentele densităţii curentului, atunci rezistivitatea este

$$\rho_t = \frac{s_x}{s_x^2 + s_y^2} F \tag{23}$$

s_y provine numai de la câmpul magnetic şi este diferit de zero chiar şi când nu are loc o mişcare termică a reţelei (vezi Secţiunea 2); dimpotrivă, s_x este cauzat de această mişcare termică. Dacă efectul perturbator al oscilaţiilor reţelei poate fi considerat ca fiind mic, atunci s_y este semnificativ mai mare decât s_x şi această ultimă mărime poate fi neglijată în numitorul din (23). Se obţine componenta s_x a densităţii curentului împărţind componenta curentului S_x din formula (21) la L^2, suprafaţa secţiunii transversale a bucăţii de metal. Am calculat mai sus componenta s_y, ec. (6). Dacă introducem acum aceste valori în (23) şi ţinem seama de neglijarea discutată anterior, obţinem:

$$\rho_t = \frac{D^2}{32\pi^3} \frac{m^2\omega_0}{\delta\hbar w e^2} \frac{1}{\nu^2} \frac{1}{kT} \sum_{n,n'} \int df' df_z \frac{f'^3 f}{f_z} W_{nn'} N\,(N+1)\,K. \tag{24}$$

6 Discutarea semnificaţiei fizice a formulei rezistenţei

Pentru a prezenta expresia (24) într-un mod mai transparent, trebuie să utilizăm un procedeu de aproximare, întrucât sumarea după n şi n' nu poate fi efectuată în mod riguros. Pentru câmpuri magnetice mici, această sumare poate fi înlocuită, în cea mai grosieră aproximaţie, printr-o integrare. Termenii $W_{nn'}$ sunt însă definiţi numai pentru valori întregi ale lui n şi n'; de aceea, pentru a putea efectua integrarea, trebuie mai întâi înlocuiţi prin expresiile aproximative (12). Începem prin a face observaţia că polinomul de sub radical din (12) este pozitiv numai între rădăcinile funcţiei, când $n + \frac{1}{2}$ şi $n' - \frac{1}{2}$ sunt pozitive. De aceea, aceste rădăcini pot fi alese ca limite de integrare, deoarece se află întotdeuna în cvadrantul $n + \frac{1}{2} \geqslant 0$ şi $n' - \frac{1}{2} \geqslant 0$.

Introducem mai întâi noile variabile $p = n + n' + 1$ şi $q = n' - n$. Atunci avem aproximativ

$$\sum_{n,n'} W_{nn'} K \simeq \frac{1}{2\pi} \int\int \frac{dpdq}{\sqrt{p\alpha^2 - q^2 - \frac{\alpha^4}{4}}} K. \tag{25}$$

Integrăm mai întâi după p. Integrarea este foarte uşor de efectuat, dacă funcţia Fermi este înlocuită cu funcţia treaptă. Atunci funcţia

$$\frac{1}{e^{X-\frac{\xi}{2}}+1} - \frac{1}{e^{X+\frac{\xi}{2}}+1} \tag{26}$$

este egală cu 1 în intervalul $-\xi/2 < X < +\xi/2$ şi egală cu zero în afara acestui interval; însă întrucât X este o funcţie lineară de p, expresia (26) privită ca funcţie de p este egală cu 1 într-un interval $p_1 < p < p_2$ şi egală cu zero în afara lui. Atunci integrala după primul sumand al lui K este egală cu

$$\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\sqrt{p\alpha^2 - q^2 - \frac{\alpha^4}{4}}} = \frac{2}{\alpha^2}\left[\sqrt{p\alpha^2 - q^2 - \frac{\alpha^4}{4}}\right]_{p_1}^{p_2} \tag{27}$$

(ceea ce se poate fi transpus întocmai asupra celui de al doilea sumand, care îl conţine pe X').

p_1 şi p_2 sunt soluţiile ecuaţiilor

$$X + \frac{\xi}{2} = 0 \;\text{ şi }\; X - \frac{\xi}{2} = 0$$

aşadar

$$p_1 = -\frac{kT}{\hbar\omega_0}\xi - \frac{m\omega_0}{\hbar}\frac{1}{f_z^2}q^2 + P,$$

$$p_2 = +\frac{kT}{\hbar\omega_0}\xi - \frac{m\omega_0}{\hbar}\frac{1}{f_z^2}q^2 + P,$$

unde P este o notaţie pentru alţi termeni, neinteresanţi. Coeficientul lui q^2 sub radicalul din partea dreaptă a ecuaţiei (27) devine

$$-\left(1 + \frac{m\omega_0}{\hbar}\frac{\alpha^2}{f_z^2}\right) = -\frac{f^2}{f_z^2}$$

dăcă introducem pentru α^2 valoarea sa:

$$\frac{\hbar}{m\omega_0}\left(f_x^2 + f_y^2\right).$$

Integrarea după q a fiecăruia dintre sumanzii din partea dreaptă a lui (27) este echivalentă cu cvadratura unei jumătăţi de elipsă, care are una dintre axe egală cu rădăcina pătrată a termenului ce nu-l conţine pe q din expresia de sub radical a sumandului, şi cealaltă axă mai mare cu factorul f_z/f; aşadar, această integrare are ca rezultat termenul ce nu-l conţine pe q multiplicat cu $(\pi/2)\,(f_z/f)$. Diferenţa celor două integrale după q este atunci egală cu diferenţa termenilor ce nu-l conţin pe q, multiplicaţi cu acelaşi factor, aşadar

$$\frac{2}{\alpha^2}\int\left[\sqrt{p\alpha^2 - q^2 - \frac{\alpha^4}{4}}\right]_{p_1}^{p_2} dq = 2\pi\frac{kT}{\hbar\omega_0}\xi\frac{f_z}{f}.$$

Cel de al doilea sumand al lui K conduce la acelaşi rezultat, astfel încât:

$$\sum_{n,n'} W_{nn'}K \cong 2\frac{kT}{\hbar\omega_0}\xi\frac{f_z}{f}.$$

Dacă înlocuim acest rezultat în expresia (24), atunci obţinem pentru rezistivitate

$$\rho_t = \frac{D^2}{16\pi^3} \frac{m^2}{\delta\hbar^2 we^2} \frac{1}{\nu^2} \sum_{n,n'} \int df' df_z f'^3 \xi N (N+1) \tag{28}$$

După introducerea coordonatelor polare $f_z = f\cos\theta$, $\quad f' = f\sin\theta$, integrarea după unghi poate fi efectuată foarte uşor şi, după ce mai înlocuim şi f prin $\xi = \frac{\hbar\omega}{kT} = \frac{\hbar wf}{kT}$, atunci obţinem

$$\rho_t = \frac{D^2}{24\pi^3} \frac{m^2}{\delta\hbar^7 w^6} \frac{1}{e^2\nu^2} (kT)^5 \int_0^{\Theta/T} \xi^5 \frac{e^\xi}{(e^\xi - 1)^2} d\xi \tag{29}$$

Limita superioară de integrare este exprimată, în modul cunoscut, prin temperatura caracteristică Θ a metalului. În aproximaţia în care cuantificarea poate fi neglijată, rezistenţa nu depinde aşadar de câmpul magnetic, astfel încât, conform modelului nostru, dependenţa de câmp poate fi privită drept un efect tipic cuantic. Mai trebuie observat că, dacă se transpune calculul lui Bloch pentru conductivitate în absenţa câmpului magnetic asupra modelului nostru, se obţine exact formula (29).

7 Modificarea rezistenţei în câmpuri magnetice mici

Pentru a obţine acum, ca următoare aproximaţie a calculului nostru, dependenţa de câmp pentru câmpuri magnetice slabe, trebuie să aproximăm suma după n şi n' mai exact decât am făcut-o până acum. Dacă pornim de la integrală ca aproximaţie de ordinul zero, putem îmbunătăţi aproximaţia prin adăugarea unor termeni corectivi. Este cunoscut faptul că formula de sumare Euler-MacLaurin oferă pentru termenii corectivi o dezvoltare în serie. Aici vom calcula numai primul termen al acestei serii. Formula sumării este atunci:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n'=0}^{\infty} f\left(n + \frac{1}{2}, n' + \frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \int_0^\infty f(x,y)\, dxdy +$$
$$+ \frac{1}{24} \int_0^\infty f_x(0,y)\, dy + \frac{1}{24} \int_0^\infty f_y(x,0)\, dx.$$

Formula nu poate fi folosită în această formă pentru problema noastră, deoarece expresia (12) este o bună aproximaţie pentru $W_{nn'}$, dar derivatele sale după n şi n' nu mai sunt aproximaţii bune pentru diferenţele termenilor W. De aceea trebuie să folosim în calcul expresiile exacte pentru diferenţele termenilor W; în consecinţă, în loc să integrăm de-a lungul primului cvadrant al suprafeţei n, n', trebuie acum să sumăm după valori întregi ale lui n şi n'. Avem nevoie doar de valorile la marginea suprafeţei şi de diferenţele după normala interioară, adică expresiile pentru $W_{n,0}$ şi $W_{n,1} - W_{n,0}$, iar acestea pot fi calculate uşor din funcţia noastră generatoare (11'):

$$W_{n,0}=\frac{1}{n!}\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)^n e^{-\alpha^2/2},\quad W_{n,1}=\frac{1}{n!}\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{\alpha^2}{2}-n\right)^2 e^{-\alpha^2/2}$$

$$W_{n,1}-W_{n,0}=(n+1)\left(W_{n+1,0}-W_{n,0}\right)-n\left(W_{n,0}-W_{n-1,0}\right).$$

Dacă α este suficient de mare, atunci $W_{n,0}$ privit ca funcţie de n are un maxim pronunţat pentru acel număr întreg care se află cel mai aproape de $\alpha^2/2$. Aşadar, pentru a calcula suma

$$\sum_{n=0}^{\infty} W_{n,0}\varphi\left(n\right)$$

în care φ nu se modifică prea repede, este permisă aproximaţia în care dezvoltăm această funcţie în vecinătatea punctului $n=\alpha^2/2$, ca serie de puteri şi păstrăm numai primul termen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} W_{n,0}\varphi\left(n\right)\simeq\varphi\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty} W_{n,0}=\varphi\left(\frac{\alpha^2}{2}\right).$$

În acelaşi fel se obţine:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(W_{n,1}-W_{n,0}\right)\varphi\left(n\right)=\sum_{n=0}^{\infty} n\left(W_{n,0}-W_{n-1,0}\right)\left[\varphi\left(n-1\right)-\varphi\left(n\right)\right]\simeq$$

$$\simeq-\sum_{n=0}^{\infty} n\left(W_{n,0}-W_{n-1,0}\right)\varphi'\left(n\right)=$$

$$=\sum W_{n,0}\left[\left(n+1\right)\varphi'\left(n+1\right)-n\varphi'\left(n\right)\right]\simeq\left(\frac{dn\varphi'}{dn}\right)_{n=\frac{\alpha^2}{2}}.$$

Să ne întoarcem acum la problema noastră. Întrucât sumandul este simetric în n şi n', marginile $n+\frac{1}{2}=0$ şi $n'+\frac{1}{2}=0$ contribuie cu aceeaşi mărime

$$\sum_{n,n'} W_{nn'}K=\int_{-1/2}^{\infty}\int_{-1/2}^{\infty} W_{nn'}K\,dndn'+$$

$$+\frac{1}{12}\sum_{n=0}^{\infty} W_{n,0}\left(\frac{\partial K}{\partial n'}\right)_{n'=0}+\frac{1}{12}\sum_{n=0}^{\infty}\left(W_{n,1}-W_{n,0}\right)\left(K\right)_{n'=0}.$$

Integrala a fost calculată în paragraful precedent. Aplicând regula noastră de calcul de mai sus la sumarea după n, obţinem pentru termenul corectiv următoarea expresie:

$$\frac{1}{12}\left\{\left(\frac{\partial K}{\partial n'}\right)_{n=\frac{\alpha^2}{2},n'=0}+\left(\frac{\partial K}{\partial n}\right)_{n=\frac{\alpha^2}{2},n'=0}+\frac{\alpha^2}{2}\left(\frac{\partial^2 K}{\partial n^2}\right)_{n=\frac{\alpha^2}{2},n'=0}\right\}. \tag{30}$$

Notând cu χ' şi χ'' derivatele funcţiei Fermi după variabila u şi cu $\overline{X}$ şi respectiv $\overline{X'}$, valorile lui X şi respectiv X' pentru $n=\frac{\alpha^2}{2}, n'=0$:

$$\overline{X}=\frac{1}{kT}\left[\frac{\hbar^2}{8m}\frac{f^2}{f_z^2}\left(f+2\frac{mw}{\hbar}\right)^2-E_0\right]-\frac{\xi}{2},$$

$$\overline{X}'=\frac{1}{kT}\left[\frac{\hbar^2}{8m}\frac{f^2}{f_z^2}\left(f-2\frac{mw}{\hbar}\right)^2-E_0\right]+\frac{\xi}{2},$$

atunci expresia (30) de mai sus este egală cu:

$$\frac{1}{12}\frac{\hbar\omega_0}{kT}\left\{\left(1+\frac{1}{2}\frac{f'^2}{f_z^2}\right)\left[\chi'\left(\overline{X}-\frac{\xi}{2}\right)-\chi'\left(\overline{X}+\frac{\xi}{2}\right)+\right.\right.$$

$$+\chi'\left(\overline{X}'-\frac{\xi}{2}\right)-\chi'\left(\overline{X}'+\frac{\xi}{2}\right)+$$

$$+\frac{1}{8}\frac{\hbar^2}{mkT}\frac{f'^2f^2}{f_z^4}\left(f+2\frac{mw}{\hbar}\right)^2\left[\chi''\left(\overline{X}-\frac{\xi}{2}\right)-\chi''\left(\overline{X}+\frac{\xi}{2}\right)\right] \tag{30'}$$

$$\left.\left.+\frac{1}{8}\frac{\hbar^2}{mkT}\frac{f'^2f^2}{f_z^4}\left(f-2\frac{mw}{\hbar}\right)^2\left[\chi''\left(\overline{X'}-\frac{\xi}{2}\right)-\chi''\left(\overline{X'}+\frac{\xi}{2}\right)\right]\right]\right\}.$$

Pentru a obţine termenul corectiv al rezistenţei, această expresie trebuie înmulţită mai întâi cu

$$\frac{f'^3}{f_z}N\left(N+1\right)$$

şi apoi integrată după f şi f_z de la 0 la ∞ . Este însă convenabil să introducem ca variabile de integrare f şi $t=\frac{f^2}{f_z^2}$. Atunci trebuie să înmulţim cu

$$\frac{1}{2}f^4N\left(N+1\right)\frac{t-1}{t^2}$$

şi să integrăm după f de la 0 la ∞ şi după t de la 1 la ∞. Mai întâi efectuăm integrarea după t. Argumentele derivatelor funcţiei Fermi sunt lineare în t. La integrare folosim proprietatea derivatei negative a funcţiei Fermi de a avea un maxim pronunţat pentru valoarea 0 a argumentului. De aceea, ceilalţi factori pot fi priviţi ca schimbându-se lent şi dezvoltaţi în serii de puteri în jurul acestui punct. Integrarea termenilor care conţin derivata a doua ca factor pot fi aduse la primul caz printr-o integrare prin părţi. Rezultatul calculului este

$$\frac{\hbar\omega_0}{48}\left\{\frac{1}{\frac{\hbar^2}{8m}\left(f+2\frac{mw}{\hbar}\right)}\left(\frac{1}{t_2^2}-\frac{1}{t_1^2}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\frac{\hbar^2}{8m}\left(f+2\frac{mw}{\hbar}\right)}\left(\frac{1}{t_4^2}-\frac{1}{t_3^2}\right)\right\} \tag{31}$$

unde $t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_4$ sunt soluţiile celor patru ecuaţii $\overline{X}-\frac{\xi}{2}=0,...\ \overline{X'}+\frac{\xi}{2}=0$, aşadar

$$t_1=\frac{E_0+\hbar wf}{\frac{\hbar^2}{8m}\left(f+2\frac{mw}{\hbar}\right)^2}=t_2\left(1+\frac{\hbar wf}{E_0}\right),$$

$$t_2=\frac{E_0}{\frac{\hbar^2}{8m}\left(f+2\frac{mw}{\hbar}\right)^2},$$

$$t_3=\frac{E_0}{\frac{\hbar^2}{8m}\left(f-2\frac{mw}{\hbar}\right)^2},$$

$$t_4=\frac{E_0-\hbar wf}{\frac{\hbar^2}{8m}\left(f-2\frac{mw}{\hbar}\right)^2}=t_3\left(1-\frac{\hbar wf}{E_0}\right)$$

Deoarece valoarea maximă a lui $\hbar wf$ este egală cu $k\Theta$, valoarea lui $\hbar wf/E_0$ este foarte mică pentru toate valorile pe care le poate lua f. De aceea, putem dezvolta (31) după puterile acestei mărimi şi obţinem:

$$\frac{\hbar\omega_0}{12}\hbar wf\frac{\frac{\hbar^2}{8m}\left(f^2+4\frac{m^2w^2}{\hbar^2}\right)}{E_0^3}.$$

Această expresie trebuie acum multiplicată cu $f^4N\left(N+1\right)$ şi integrată după f. Introducem din nou ca variabilă de integrare pe $\xi=\hbar wf/kT$ şi multiplicăm cu factorii de dinainte de sumarea din (24); atunci obţinem modificarea rezistivităţii ca fiind:

$$\Delta\rho_t=\frac{D^2}{32\pi^3}\frac{m\omega_0^2}{12\delta\hbar^5w^8e^2\nu^2}\frac{\left(kT\right)^5}{8E_0^3}\cdot$$

$$\cdot\left[\left(kT\right)^2\int_0^{\Theta/T}\xi^7\frac{e^\xi}{\left(e^\xi-1\right)^2}d\xi+\left(2mw^2\right)^2\int_0^{\Theta/T}\xi^5\frac{e^\xi}{\left(e^\xi-1\right)^2}d\xi\right]. \tag{32}$$

Împărţind această expresie la valoarea rezistivităţii pentru $H=0$ (29), obţinem modificarea relativă a rezistivităţii**:**

$$\frac{\Delta\rho_t}{\rho}=\frac{1}{128}\frac{\hbar^7\omega_0^2}{mw^2}\frac{1}{E_0^3}\left[\left(2mw^2\right)^2+\left(kT\right)^2\frac{I_7}{I_5}\right] \tag{33}$$

cu:

$$I_\mu = \int_0^{\Theta/T} \xi^\mu \frac{e^\xi}{\left(e^\xi - 1\right)^2} d\xi$$

8 Cazul limită al câmpurilor magnetice intense

Condiţia pentru utilizarea aproximaţiei discutate în paragraful precedent este validă daca $\hbar\omega_0 \ll kT$. Încă un caz poate fi discutat uşor: este cazul în care câmpul magnetic este atât de intens, încât toţi electronii se află în stările al căror număr cuantic n este egal cu zero. Ne putem convinge imediat că în acest caz expresia noastră (24) pentru rezistenţă depinde linear de câmpul magnetic, deoarece din suma după n şi n' trebuie luat în considerare aici numai primul termen, cu $n = n' = 0$. Funcţiile Fermi nu mai depind de câmpul magnetic, aşa încât doar factorul de dinainte de integrala din (24) şi

$$W_{0,0} = \exp\left(-\frac{\hbar}{2m\omega_0} f'^2\right)$$

depind de H. Factorul este proporţional cu H, şi $W_{0,0}$ poate fi dezvoltat într-o serie de puteri; când valoarea maximă a exponentului este mică faţă de 1, adică în cazul în care este satisfăcută condiţia

$$\frac{(kT)^2}{2mw^2\hbar\omega_0} \ll 1 \tag{34}$$

seria poate fi tăiată după termenul al doilea şi din (24) obţinem pentru rezistivitate în acest caz limită:

$$\rho_t = \frac{D^2}{16\pi^3} \frac{m^2}{\delta\hbar w e^2 \nu^2} \frac{1}{kT} \left\{ \omega_0 \int df' df_z \frac{f'^3 f}{f_z} N(N+1)\overline{K} - \right. \tag{35}$$
$$\left. -\frac{\hbar}{2m} \int df' df_z \frac{f'^3 f}{f_z} N(N+1)\overline{K} \right\}$$

unde $2\overline{K}$ este valoarea limită a lui $\cancel{K}$:

$$\overline{K} = \frac{1}{\left[\exp\left(\frac{1}{k\,T}\left(\frac{\hbar^2}{2m}f_z^2 + \frac{m\omega^2}{2f_z^2}\right) - \frac{\xi}{2}\right)\right] + 1} - \frac{1}{\left[\exp\left(\frac{1}{k\,T}\left(\frac{\hbar^2}{8m}f_z^2 + \frac{m\omega^2}{2f_z^2}\right) + \frac{\xi}{2}\right)\right] + 1}$$

Pentru a putea discuta expresia (34), trebuie estimată integrala. Mai întâi observăm că argumentelor funcţiilor Fermi de K li se poate da forma următoare:

$$\frac{1}{k\,T}\left(\frac{\hbar^2}{2m}f_z^2 + \frac{m\omega^2}{2f_z^2}\right) - \frac{\xi}{2} = \frac{1}{k\,T}\frac{mw^2}{2}\left(\frac{f}{f_z} - \frac{\hbar}{2mw}f_z\right)^2$$

$$\frac{1}{k\,T}\left(\frac{\hbar^2}{8m}f_z^2 + \frac{m\omega^2}{2f_z^2}\right) + \frac{\xi}{2} = \frac{1}{k\,T}\frac{mw^2}{2}\left(\frac{f}{f_z} + \frac{\hbar}{2mw}f_z\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{k\,T} \frac{mw^2}{2} \left(\frac{f}{f_z} - \frac{\hbar}{2mw} f_z \right)^2 + \xi,$$

astfel încât nici unul nu poate lua valori negative. Funcţia Fermi este însă semnificativ diferită de zero numai pentru valori pozitive mici ale argumentului. Deoarece cel de al doilea argument dispare doar pentru $f = 0$, aşadar pentru $\xi = 0$, putem dezvolta funcţia corespunzătoare după puterile sumandului ξ al acestui argument şi obţinem astfel pentru $\overline{K}$:

$$\overline{K} = -\xi \chi' \left[\frac{mw^2}{k\,T} \left(\frac{f}{f_z} - \frac{\hbar}{2mw} f_z \right)^2 \right].$$

Introducem din nou, ca în paragraful precedent, f şi $t = \left(\frac{f}{f_z} \right)^2$ ca variabile de integrare. Pentru prima integrală, trebuie efectuată mai întâi următoarea integrală după t de la 1 la ∞:

$$-\frac{1}{2} \int_1^\infty \frac{t-1}{t^2} \chi' \left[\frac{mw^2}{2k\,T} t \left(1 - \frac{kT}{2mw^2} \frac{\xi}{t} \right)^2 \right] dt \tag{36}$$

şi apoi rezultatul trebuie multiplicat cu

$$\left(\frac{kT}{\hbar w} \right)^5 \xi^5 N \left(N + 1 \right)$$

şi integrat după ξ. Pentru următorul calcul vom presupune că $kT \gg mw^2$, ceea ce nu reprezintă o restricţie semnificativă pentru temperatură, deoarece mw^2/k este de ordinul $1°$. Acum putem calcula integrala (36) ca integrală peste derivata funcţiei Fermi, după metoda obişnuită: se dezvoltă factorii în acel punct în care argumentul derivatei funcţiei Fermi se anulează şi apoi se integrează seria termen cu termen; aici, ne putem limita la primul termen. Dacă mai introducem

$$u = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{kT}{2mw^2} \frac{1}{t} \right)$$

ca variabilă de integrare, atunci obţinem pentru (36) rezultatul aproximativ:

$$\frac{1}{\sqrt{\xi}} \int_\infty^\infty \frac{du}{\left(1 + \exp\left(u^2\right)\right)\left(1 + \exp\left(-u^2\right)\right)} = \frac{j}{\sqrt{\xi}} = \frac{0.708}{\sqrt{\xi}}$$

unde $j = 0,708$. Integrarea după ξ duce atunci la următorul rezultat pentru prima integrală a acoladei din (35):

$$j \left(\frac{kT}{\hbar w} \right)^5 \int_0^{\Theta/T} \xi^{9/2} N \left(N + 1 \right) d\xi$$

După un calcul asemănător se obţine pentru a doua integrală:

$$-\frac{1}{2}j\left(\frac{kT}{\hbar w}\right)^7\int_0^{\Theta/T}\xi^{13/2}N\left(N+1\right)d\xi$$

Introducând aceste rezultate în (35), obţinem pentru rezistivitate:

$$\rho_t = j\frac{D^2}{16\pi^3}\frac{m^2}{\delta\hbar w e^2\nu^2}\frac{1}{kT}\cdot$$

$$\cdot\left\{\omega_0\left(\frac{kT}{\hbar w}\right)^5 I_{9/2}-\frac{1}{2}\frac{\hbar}{m}\left(\frac{kT}{\hbar w}\right)^7 I_{13/2}\frac{kT}{mw^2}\right\}$$

şi pentru modificarea relativă a rezistivităţii:

$$\frac{\Delta\rho_t}{\rho}=\frac{3}{2}j\left\{\frac{I_{9/2}}{I_5}\frac{\hbar\omega_0}{kT}-\frac{1}{2}\frac{kT}{mw^2}\frac{I_{13/2}}{I_5}\right\}-1. \tag{37}$$

9 Efectul în câmp longitudinal

Atunci când câmpul electric şi cel magnetic sunt paralele, calculul rezistenţei este foarte asemănător celui pe care l-a efectuat Bloch pentru cazul absenţei câmpurilor. Mişcarea electronului paralel cu cele două câmpuri este o mişcare accelerată. Astfel, în contrast cu cazul câmpului magnetic transversal, nu există stări staţionare în ambele câmpuri şi câmpul electric trebuie privit drept cauză a modificării temporale a funcţiei de distribuţie. Atunci trebuie determinată cu metodele obişnuite acea funcţie de distribuţie care rămâne staţionară sub influenţa câmpului electric şi a mişcării termice a reţelei.

Pentru a determina această funcţie de distribuţie pornim de la $\chi_q+\psi_q$, unde χ_q este funcţia Fermi şi ψ_q este o corecţie, astfel aleasă încât să fie proporţională în primă aproximaţie cu intensitatea câmpului electric F. Când punem condiţia de staţionaritate luăm în considerare numai termenii lineari în F, ceea ce înseamă că termenii pătratici din F sau produsul $F\psi$ vor fi neglijaţi. Modificarea temporală a funcţiei de distribuţie în ansamblul ei, care trebuie să se anuleze în cazul staţionar, se compune din doi termeni. Un termen conţine influenţa câmpului electric şi este, aşa cum se ştie,

$$\frac{eF}{\hbar}\frac{\partial\left(\chi_q+\psi_q\right)}{\partial l}$$

Conform presupoziţiei făcute anterior, el este egal cu:

$$\frac{eF}{\hbar}\frac{\partial\chi_q}{\partial l},$$

unde l înseamnă din nou numărul de undă al electronului pentru mişcarea paralelă cu câmpul magnetic. Celălalt termen conţine modificarea cauzată de mişcarea termică a reţelei. Pentru a calcula acest termen, mai avem nevoie de probabilităţile de tranziţie. Însă acestea pot fi obţinute foarte uşor, dacă în formulele noastre (8a şi b) punem $F = 0$. Deoarece F apare numai în factorii $(1-\cos\Omega t)/\Omega^2$, trebuie doar să punem $\varepsilon_{q'} - \varepsilon_q$ pentru diferenţele de energie din Ω. Modificarea funcţiei de distribuţie datorată ciocnirilor, devine atunci:

$$\left(\frac{d\chi_q}{dt} + \frac{d\psi_q}{dt}\right)_{ciocniri} = \frac{D^2}{M\hbar u}\frac{\partial}{\partial t}\sum_{n'}\sum_{l'x'_0}\sum_{\overrightarrow{f}} fW_{nn'}\cdot$$

$$\cdot\left\{\left[(\chi_{q'}+\psi_{q'})(1-\chi_q-\psi_q)N - (\chi_q+\psi_q)(1-\chi_{q'}-\psi_{q'})(N+1)\right]\cdot\right.$$

$$\cdot\frac{1-\cos\left(\frac{\varepsilon_{q'}-\varepsilon_q}{\hbar}+\omega\right)t}{\left(\frac{\varepsilon_{q'}-\varepsilon_q}{\hbar}+\omega\right)^2} + \left[(\chi_{q'}+\psi_{q'})(1-\chi_q-\psi_q)(N+1) - \right.$$

$$\left.\left. - (\chi_q+\psi_q)(1-\chi_{q'}-\psi_{q'})N\right]\frac{1-\cos\left(\frac{\varepsilon_{q'}-\varepsilon_q}{\hbar}-\omega\right)t}{\left(\frac{\varepsilon_{q'}-\varepsilon_q}{\hbar}-\omega\right)^2}\right\}$$

$$\simeq \frac{D^2}{M\hbar w}\frac{\partial}{\partial t}\sum_{n'}\sum_{l',x'_0}\sum_{\overrightarrow{f}} fW_{nn'}\cdot \tag{38}$$

$$\cdot\left\{\left[\chi_{q'}(1-\chi_q)N - \chi_q(1-\chi_{q'})(N+1) + \psi_{q'}\cdot\right.\right.$$

$$\cdot\left((1-\chi_q)N - \chi_q(N+1)\right) - \psi_q\left(\chi_{q'}N - (1-\chi_{q'})(N+1)\right)] + [(\chi_{q'}+\psi_{q'})(1-\chi_q-\psi_q)(N+1)$$

$$\cdot\frac{1-\cos\left(\frac{\varepsilon_{q'}-\varepsilon_q}{\hbar}+\omega\right)t}{\left(\frac{\varepsilon_{q'}-\varepsilon_q}{\hbar}+\omega\right)^2} + \left[\chi_{q'}(1-\chi_q)(N+1) - \chi_q(1-\chi_{q'})N + \right]\cdot$$

$$+\psi_{q'}\left((1-\chi_q)(N+1)+\chi_q N\right) + \psi_q\left(\chi_{q'}(N+1)+(1-\chi_{q'})N\right)]$$

$$\left.\cdot\frac{1-\cos\left(\frac{\varepsilon_{q'}-\varepsilon_q}{\hbar}-\omega\right)t}{\left(\frac{\varepsilon_{q'}-\varepsilon_q}{\hbar}-\omega\right)^2}\right\},$$

dacă termenii în care apar $\psi_q\psi_{q'}$ sunt neglijaţi. Această expresie poate fi simplificată dacă utilizăm regulile de selecţie (10a,b), care sunt valabile şi în acest caz. Cu ajutorul lor eliminăm f_z şi x'_0 şi înlocuim apoi sumările după celelalte numere de undă prin integrale. Obţinem:

$$\left(\frac{d\chi_q}{dt}+\frac{d\psi_q}{dt}\right)_{ciocniri}=\frac{D^2}{M\hbar w}\frac{\partial}{\partial t}\sum_{n'}\int\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 dl'df_xdf_yfW_{nn'}\Lambda \tag{39}$$

unde Λ este o prescurtare pentru acolada din (38).

Este de observat că χ_q nu depinde de numărul cuantic x_0. Pentru ψ_q, vom căuta o soluţie care are aceeaşi proprietate. Singura funcţie din partea dreaptă a lui (39) care mai depinde de x_0 este $W_{nn'}$, dar întrucât ea nu depinde decât de diferenţa $x_0'-x_0$, pe care am exprimat-o deja prin intermediul lui f_y, dependenţa de x_0 dispare complet. Mai departe, integrandul din (39) îi conţine pe f_x şi f_y numai în combinaţia $f_x^2+f_y^2$, astfel încât se poate efectua uşor o integrare polară:

$$\left(\frac{d\chi_q}{dt}+\frac{d\psi_q}{dt}\right)_{ciocniri}=\frac{L^2}{(2\pi)^2}\frac{D^2}{M\hbar w}\frac{\partial}{\partial t}\sum_{n'}\int_{-\infty}^{+\infty}dl'\int_0^{\infty}df'f'fW_{nn'}\Lambda. \tag{40}$$

Vom folosi acum în maniera obişnuită legea de conservare a energiei pentru a elimina pe f'. În acest scop descompunem integrala din (40) în două integrale, din care una se referă la procesele de emisie, iar cealaltă, la procesele de absorbţie. Apoi folosim caracterul de funcţie δ al factorilor oscilanţi de tipul $(1-\cos\Omega t)/\Omega^2$, pentru a efectua integrarea după f'; atunci, după cum ştim, termenii de ordinul zero din F dispar. După efecutarea derivării după t se obţine

$$\left(\frac{d\chi_q}{dt}+\frac{d\psi_q}{dt}\right)_{ciocniri}=\frac{1}{4\pi}\frac{D^2}{\delta\hbar w^2}\sum_{n'}\int dl'\left[\left(f^2W_{nn'}\Gamma\right)_I+\left(f^2W_{nn'}\Delta\right)_{II}\right]$$

unde:

$$\Gamma=\psi_{q'}\left[\left(1-\chi_q\right)N+\chi_q\left(N+1\right)\right]-\psi_q\left[\chi_{q'}N+\left(1-\chi_{q'}\right)\left(N+1\right)\right]$$

$$\tag{41}$$

$$\Delta=\psi_{q'}\left[\left(1-\chi_q\right)\left(N+1\right)+\chi_qN\right]-\psi_q\left[\chi_{q'}\left(N+1\right)+\left(1-\chi_{q'}\right)N\right]$$

şi indicii I respectiv II înseamnă că pentru f' şi f_z trebuie introduse în paranteze soluţiile ecuaţiilor

$$\varepsilon_{q'}-\varepsilon_q+\hbar\omega=0,\quad l'-l+f_z=0$$

respectiv:

$$\varepsilon_{q'}-\varepsilon_q-\hbar\omega=0,\quad l'-l-f_z=0$$

Acum putem formula condiţia de staţionaritate:

$$-\frac{eF}{kT}\frac{\hbar}{m}\chi_q\left(1-\chi_q\right)l+\frac{1}{4\pi}\frac{D^2}{\delta\hbar w^2}\cdot$$

$$\cdot\sum_{n'}\int dl'\left[\left(f^2W_{nn'}\Gamma\right)_I+\left(f^2W_{nn'}\Delta\right)_{II}\right]=0 \tag{42}$$

Este de presupus că funcţia de distribuţie staţionară perturbată se obţine din cea neperturbată printr-o mică translaţie în l :

$$\chi\left(n,l\right)+\psi\left(n,l\right)=\chi\left(n,l-\bar{l}\right), \tag{43}$$

deci:

$$\psi_q=\chi\left(n,l-\bar{l}\right)-\chi\left(n,l\right)\simeq\frac{\hbar^2}{mkT}l\bar{l}\chi_q\left(1-\chi_q\right).$$

De aceea este adecvat să propunem următoarea formă pentru ψ_q :

$$\psi_q=\frac{\hbar^2}{mkT}l\chi_q\left(1-\chi_q\right)C_q,$$

unde acum considerăm pe C_q în general ca o funcţie de numerele cuantice. Pentru C_q obţinem din (42) următoarea ecuaţie integro-diferenţială:

$$-eF\chi_q\left(1-\chi_q\right)l+\frac{1}{4\pi}\frac{D^2}{\delta w^2}\sum_{n'}\int dl'\left\{\left[f^2W_{nn'}N\chi_{q'}\left(1-\chi_q\right)\right]_I+\right.$$

$$\left.+\left[f^2W_{nn'}N\chi_q\left(1-\chi_{q'}\right)\right]_{II}\left(l'C_{q'}-lC_q\right)=0\right\}. \tag{44}$$

Pentru temperaturi mai joase ($T\ll\Theta$) se poate aplica, pentru rezolvarea acestei ecuaţii, acea metodă folosită de Bloch [10] pentru cazul în care nu există câmpuri şi tragem concluzia că în primă aproximaţie $C=const.$ satisface ecuaţia (44). Condiţia esenţială pentru aplicarea metodei lui Bloch, şi anume ca $l'-l=\pm f_z$ să fie foarte mică pentru temperaturi joase, este îndeplinită şi în cazul nostru. Pentru temperaturi înalte însă, ecuaţia noastră este mult mai dificil de rezolvat decât ecuaţia lui Bloch, întrucât dependenţa de n şi n' este foarte neclară. De aceea ne vom limita aici la cazul temperaturilor joase.

Valoarea constantei, pe care o numim acum din nou $\bar{l}$, este uşor de dedus din ecuaţia (44): se multiplică ecuaţia cu l, se sumează după n de la 0 la $+\infty$ şi se integrează după l de la $-\infty$ la $+\infty$. Se obţine:

$$-eF\sum_n\int dl\ l^2\chi_q\left(1-\chi_q\right)+\frac{1}{4\pi}\frac{D^2}{\delta w^2}\bar{l}\cdot$$

$$\cdot\sum_n\sum_{n'}\int dldl'\left(\frac{l+l'}{2}+\frac{l-l'}{2}\right)\left(l'-l\right)\cdot$$

$$\cdot \left\{ \left[f^2 W_{nn'} \chi_{q'} \left(1-\chi_q\right) N \right]_I + \left[f^2 W_{nn'} \chi_q \left(1-\chi_{q'}\right) N \right]_{II} \right\} = 0.$$

Deoarece expresia din acolada de sub integrala celui de al doilea termen este simetrică în variabilele cu şi fără semnul „prim”, rezultatul sumării şi al integrării sumandului cu factorul asimetric $(l'+l)(l'-l)/2$ este nul şi obţinem:

$$-eF \sum_n \int dl\ l^2 \chi_q \left(1-\chi_q\right) =$$

$$= \frac{1}{8\pi} \frac{D^2}{\delta w^2} \bar{l} \sum_n \sum_{n'} \int dl dl' \left(l'-l\right)^2 \cdot \tag{45}$$

$$\cdot \left\{ \left[f^2 W_{nn'} \chi_{q'} \left(1-\chi_q\right) N \right]_I + \left[f^2 W_{nn'} \chi_{q'} \left(1-\chi_{q'}\right) N \right]_{II} \right\}.$$

Membrului stâng i se poate da o altă formă printr-o integrare prin părţi:

$$eF \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} dl\ l^2 \chi_q \left(1-\chi_q\right) =$$

$$= \frac{mkT}{\hbar} eF \sum_n \int \chi_q dl = 4\pi^2 \frac{kT}{\hbar\omega_0} eF\nu.$$

La ultima transformare am folosit formula care exprimă numărul stărilor $Z_n dl$ cu un anumit număr cuantic n şi al căror număr cuantic l se află într-un interval de lungimea dl [7]:

$$Z_n dl = \frac{1}{4\pi^2} \frac{m\omega_0}{\hbar} L^3 dl.$$

Dar $\bar{l}$ este, aşa cum se poate vedea imediat din (43), numărul de undă mediu pe direcţia celor două câmpuri. Pentru densitatea de curent se obţine imediat:

$$s_z = -e\nu \frac{\hbar \bar{l}}{m}$$

şi pentru rezistivitate:

$$\rho_l = \frac{F}{s_z} = -\frac{mF}{e\omega\hbar\bar{l}}.$$

Cu valoarea lui $\bar{l}$ dată de ecuaţia (45) se obţine

$$\rho_l = \frac{D^2}{32\pi^3} \frac{m\omega_0}{\delta w^2 e^2 \nu^2} \frac{1}{kT} \sum_{n,n'} \int dl dl' \left(l'-l\right)^2 \cdot$$

$$\cdot \left\{ \left[f^2 W_{nn'} N \chi_{q'} \left(1-\chi_q\right) \right]_I + \left[f^2 W_{nn'} \chi_q \left(1-\chi_{q'}\right) N \right]_{II} \right\}.$$

Introducând acum pe f_z şi f' ca variabile de integrare în loc de l şi l' şi folosind identităţile

$$\left[\chi_{q'}\left(1-\chi_q\right)\right]_I = \left[\left(N+1\right)\left(\chi_{q'}-\chi_q\right)\right]_I \ ,$$

$$\left[\chi_q\left(1-\chi_{q'}\right)\right]_{II} = \left[\left(N+1\right)\left(\chi_q-\chi_{q'}\right)\right]_{II} \ ,$$

obţinem pentru rezistivitate formula:

$$\rho_l = \frac{D^2}{16\pi^3}\frac{m^2\omega_0}{\delta\hbar w e^2\nu^2}\frac{1}{kT}\sum_{n,n'}\int df' df_z f' f_z f W_{nn'} N\left(N+1\right)\cdot \tag{46}$$

$$\cdot\left[\frac{1}{\exp\left(X-\frac{\xi}{2}\right)+1}-\frac{1}{\exp\left(X+\frac{\xi}{2}\right)+1}+\frac{1}{\exp\left(X'-\frac{\xi}{2}\right)+1}-\frac{1}{\exp\left(X'+\frac{\xi}{2}\right)+1}\right],$$

unde X şi X' au semnificaţia din (20). Integrarea trebuie efectuată doar după valorile pozitive ale lui f' şi f_z.

Pentru a prelucra în continuare expresia (46) putem folosi exact aceleaşi metode pe care le-am folosit pentru expresia (24) a rezistenţei în câmp transversal.

Integrarea după n şi n', utilizând expresiile (12) pentru $W_{nn'}$, conduce evident la acelaşi rezultat ca acela din cazul câmpului transversal. Acest lucru poate fi confirmat cu uşurinţă şi prin calcul direct. Singura diferenţă apare la integrarea după azimut în planul f', f_z: în cazul de faţă avem ca factor integrala

$$\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\sin\theta d\theta$$

în loc de

$$\int_0^{\pi/2}\sin^3\theta d\theta,$$

ceea ce compensează exact diferenţa dintre factorii numerici din (46) şi (24).

În scopul calculării corecţiilor pentru câmpuri magnetice mici, putem prelua neschimbat rezultatul nostru (30'). Acum însă trebuie să multiplicăm această expresie cu $1/\left(2t^2\right)$ şi să integrăm după t de la 0 la ∞. După un calcul foarte asemănător cu acela din cazul efectului în câmp transversal, obţinem

$$\Delta\rho_l = \frac{D^2}{16\pi^3}\frac{m^2\omega_0^2}{\delta\hbar^5 w^6 e^2\nu^2}\frac{1}{24E_0^2}\left(kT\right)^5 I_5$$

şi

$$\frac{\Delta\rho_l}{\rho} = \frac{1}{16}\frac{\hbar^2\omega_0^2}{E_0^2}. \tag{47}$$

În cazul limită al câmpurilor magnetice puternice se poate de asemenea folosi aceeaşi metodă ca cea din paragraful precedent. Rezultatul este

$$\frac{\Delta\rho_l}{\rho} = 12j\frac{mw^2}{kT}\left\{\frac{I_{3/2}}{I_5}\cdot\frac{\hbar\omega_0}{kT}-\frac{1}{2}\frac{kT}{mw^2}\cdot\frac{I_{13/2}}{I_5}\right\}-1. \tag{48}$$

10 Discutarea rezultatelor

Rezultatele noastre sunt conţinute în formulele:

$$\rho_t = \frac{D^2}{24\pi^3}\frac{m^2}{\delta\hbar^7 w^6}\frac{1}{e^2\nu^2}(kT)^5\int_0^{\Theta/T}\xi^5\frac{e^\xi}{\left(e^\xi-1\right)^2}d\xi, \quad pentru \quad \hbar\omega_0\to 0 \tag{29*}$$

$$\frac{\Delta\rho_t}{\rho} = \frac{1}{128}\frac{\hbar^7\omega_0^2}{mw^2}\frac{1}{E_0^3}\left[\left(2mw^2\right)^2+(kT)^2\frac{I_7}{I_5}\right], \quad pentru \quad \hbar\omega_0\ll kT \tag{33*}$$

$$\frac{\Delta\rho_t}{\rho} = 1,062\left\{\frac{I_{9/2}}{I_5}\frac{\hbar\omega_0}{kT}-\frac{1}{2}\frac{kT}{mw^2}\frac{I_{13/2}}{I_5}\right\}-1, \quad pentru \quad \hbar\omega_0\gtrapprox E_0 \tag{37*}$$

$$\frac{\Delta\rho_l}{\rho} = \frac{1}{16}\frac{\hbar^2\omega_0^2}{E_0^2}, \quad pentru \quad \hbar\omega_0\ll kT \tag{47*}$$

$$\frac{\Delta\rho_l}{\rho} = 4,24\frac{mw^2}{kT}\left\{\frac{I_{3/2}}{I_5}\cdot\frac{\hbar\omega_0}{kT}-\frac{1}{2}\frac{kT}{mw^2}\cdot\frac{I_{13/2}}{I_5}\right\}-1, \quad dacă \quad \hbar\omega_0\gtrapprox E_0 \tag{48*}$$

În cazul limită (29) rezistenţa trebuie să fie identică cu cea pe care am obţine-o dacă am rezolva problema pentru $H = 0$ cu metoda lui Bloch. Rezultatul nostru, însă, este mai complet decât cel al lui Bloch, deoarece formula noastră (24) pentru rezistenţă este considerată valabilă şi pentru $T\sim\Theta$, aşa încât şi (29) trebuie privită ca valabilă în acest domeniu de temperatură. Grüneisen [11] a arătat că formula (24) explică bine datele experimentale şi în domeniul $T\sim\Theta$.

Pentru câmpuri magnetice mici, calculele noastre conduc, atât în cazul longitudinal, cât şi în cel transversal, la o dependenţă pătratică de câmpul magnetic a modificării rezistenţei. Rezultatele teoretice sunt însă dificil de comparat cu datele experimentale, întrucât coeficientul măsurat al legii pătratice depinde puternic de puritatea şi prelucrarea materialului cercetat; fiecare dintre acestea conduce la o rezistenţă suplimentară care, din motive de simetrie, depinde pătratic de câmpul magnetic şi aceste efecte nu pot fi separate.

Pentru câmpuri magnetice foarte intense, calculul nostru arată că, atât în cazul transversal, cât şi în cel longitudinal, modificarea rezistenţei depinde linear de câmpul magnetic. Panta dreptei care reprezintă grafic această legitate într-o diagramă, în care $\Delta\rho/\rho$ se ia ca ordonată şi H ca abcisă, este, conform lui Kapiţa, practic independentă de puritatea şi tratarea materialului. Conform formulei noastre (37), panta depinde de masa efectivă a electronului. De aceea, se poate determina valoarea masei efective prin compararea cu rezultatele experimentale. Următoarul tabel conţine raportul m/μ dintre masa efectivă şi masa obişnuită a electronului pentru unele metale:

Metal	*Cu*	*Ag*	*Mg*	*Cd*	*Al*	*As*	*Sb*	*Bi*
m/μ	$0,7$	$1,0$	$0,1$	$0,4$	$0,5$	$1,1\cdot 10^{-2}$	$8,3\cdot 10^{-3}$	$3,3\cdot 10^{-4}$

Pentru metalele din primele trei coloane ale sistemului periodic se obţin aşadar valori normale. În cazul bismutului însă, se obţine o valoare foarte mică a masei efective, ca o consecinţă a puternicei dependenţe a modificării rezistenţei de câmp. Un rezultat asemănător a obţinut şi Peierls [12], prin compararea teoriei lui a diamagnetismului la temperaturi joase şi în câmpuri magnetice intense cu măsurătorile lui de Haas şi van Alphen; el obţine pentru magnetonul efectiv al mişcării pe traiectorie a electronilor de bismut o valoare de $0,5\cdot 10^{-18}$, care duce la o valoare a raportului $m/\mu = 1,8\cdot 10^{-3}$; concordanţa cu valoarea ce rezultă din calculul nostru este aşadar doar calitativă.

Despre dependenţa pantei de temperatură se poate spune doar puţin, întrucât nu au fost făcute cercetări sistematice asupra acestui subiect. Kapiţa a făcut măsurătorile numai la trei temperaturi, care sunt prea îndepărtate de temperatura caracteristică, aşadar temperaturi pentru care formula noastră nu reprezintă o dependenţă simplă de temperatură. Pare totuşi că panta ce rezultă din teorie creşte mai lent cu scăderea temperaturii decât cea măsurată.

Compararea dintre experiment şi teorie al celuilalt parametru al legii lineare, cel care determină poziţia punctului de intersecţie al dreptei cu axa absciselor, este mai greu de făcut decât în cazul pantei, deoarece acest parametru, conform lui Kapiţa, depinde puternic de tratarea şi puritatea metalului. Conform calculului nostru, domeniul de valabilitate al legii lineare începe de abia pentru intensităţi ale câmpului care sunt atât de mari, încât toţi electronii se află în stări pentru care numărul cuantic n este egal cu zero. Limita inferioară a intesităţii câmpului care satisface această condiţie este dată de

$$\frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{2m\omega_0}{\hbar}\right)^{3/2} = \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{2eH}{\hbar c}\right)^{3/2} = \nu.$$

În loc de comparaţia cu punctul de intersecţie cu abscisa, este convenabil să facem comparaţia pentru această intensitate de câmp critică, cu scopul de a determina numărul electronilor pe centimetru cub, ν. Dacă facem presupoziţiile obişnuite despre densitatea electronilor, se obţine pentru această intensitate critică a câmpului o valoare de ordinul 10^8 Gauss. Experimental însă, legea lineară este valabilă pentru multe metale deja pentru câmpuri având ordinul de mărime 10^5 Gauss. În aceste cazuri trebuie să facem, aşadar, presupunerea că valoarea lui ν este mult mai mică decât valoarea pe care o obţinem dacă privim numărul electronilor de conducţie ca fiind egal cu numărul atomilor pe centimentru cub. Pentru metalele alcaline nu suntem obligaţi să facem o asemenea presupunere, întrucât din rezultatele măsurătorilor lui Kapiţa nu rezultă valabilitatea certă a legii lineare, nici pentru intesităţile cele mai mari ale câmpului magnetic.

Dimpotrivă, pentru metale precum cadmiul şi bismutul, legea lineară este sigur valabilă deja pentru câmpuri având ordinul de mărime de $3\cdot 10^4$ Gauss; trebuie aşadar să tragem concluzia că în aceste cazuri, ν este mult mai mic decât se consideră în mod obişnuit. În cazul bismutului s-a ajuns la aceeaşi concluzie şi prin alte metode: Peierls [12] obţine din proprietăţile diamagnetice valoarea $\nu = 2 \cdot 10^{16}$; Bellia [13] obţine din constanta Hall, $\nu = 1,2 \cdot 10^{19}$; şi, recent, Eucken şi Förster [14] obţin din cercetări asupra lungimii drumului liber al electronilor de bismut valori pentru ν cuprinse între $1,63 \cdot 10^{17}$ şi $10.9 \cdot 10^{17}$. Conform formulei noastre (49) se obţine o valoare $\nu \simeq 5 \cdot 10^{17}$. Concordanţa rezultatelor care se obţin cu ajutorul diferitelor metode este desigur foarte puţin exactă, dar totuşi se poate trage concluzia că numărul electronilor de conducţie ai bismutului este semnificativ mai mic decât numărul atomilor.

La sfârşit doresc să îmi exprim mulţumirile domnului profesor Heisenberg pentru a-mi fi sugerat tema acestei lucrări şi pentru ajutorul permanent acordat pe parcursul elaborării ei, ca şi domnului Dr. Bloch pentru nenumărate discuţii interesante despre problemele tratate.

Curriculum vitae

Eu, Şerban Ţiţeica, m-am născut la 27 martie 1908 la Bucureşti, ca fiu al profesorului George Ţiţeica. Am urmat cursurile liceului „Mihai Vitezul” din Bucureşti, unde mi-am susţinut examenul de bacalaureat în anul 1926. Din toamna 1926 până în vara 1929 am studiat matematica, fizica şi chimia la Universitatea din Bucureşti. După o întrerupere de un an, în care mi-am făcut serviciul militar obligatoriu, am început să studiez fizică, matematică şi geofizică la Universitatea din Leipzig. Aici am urmat cursurile şi seminariile următorilor domni profesori şi lectori: Heisenberg, Hund, v. d. Werden, Weickmann, Bloch, Haurwitz.

Tuturor acestor domni le datorez multe mulţumiri.

Primită pe 23 decembrie 1934.

Bibliografie

[1] A. Sommerfeld, Ztschr. f. Phys. **48**. S1. 1928.

[2] P.Kapitsa, Proc. Roy. Soc. (A) 123. S. 292. 1928.

[3] N. H. Frank, Ztschr. f. Phys. **64**. S650. 1930.

[4] F. Bloch, Ztschr. f. Phys. **53**. S216. 1929.

[5] R. Peierls, Ann. d. Phys [5] **10**. S. 37. 1931.

[6] F. Bloch, Ztschr. f. Phys. **52**. S555. 1928.

[7] L. Landau, Ztschr. f. Phys. **64**. S629. 1930.

[8] E. Teller, Ztschr. f. Phys. **67**. S311. 1931.

[9] R. Peierls, Ztschr. f. Phys. **80**. S763. 1933.

[10] F. Bloch, Ztschr. f. Phys. **57**. S545. 1929 (?)

[11] E. Grüneisen, Leipziger Vorträge 1930.

[12] R. Peierls, Ztschr. f. Phys. **81**. S192. 1933.

[13] O. Bellia, Ztschr. f. Phys. **74**. S655. 1932.

[14] A. Eucken, F. Förster, Gött. Nachr. Bd. 1. Nr. 3. S. 43. 1934.

On the change of metals resistance in magnetic field

Şerban Ţiţeica

Editor's note: This is the English translation of Şerban Ţiţeica's Ph.D. thesis, approved by the Department of Mathematics and Natural Sciences of the University of Leipzig, 1934; scientific adviser: Werner Heisenberg. The thesis was published in German, in *Annalen der Physik (Leipzig)*, 5. Folge, **22**, Heft 2, 129-161 (1935). In its original version, it has no abstract. However, in order to facilitate reader's effort, a short presentation written by Ţiţeica in a report about his scientific activity, was inserted here, and named, somewhat abusively, "Abstract".

Abstract:

In this paper, I deal with the electronic theory of the change of the electric resistance of a metal in a magnetic field. Such a change was known to the experimentalists from much time ago, as they had proved that, at least for weak magnetic fields, it is proportional to the square of the field. The theories available in this domain could explain only qualitatively the aforementioned dependence. But Kapitza's experiments, made in 1928 with very strong magnetic fields, have shown that, for such fields, the change of the resistance is proportional to the field, and that the longitudinal effect has the same order of magnitude as the transverse one. As the current theories could not explain these results, I chose as starting point for my research an effect which was neglected in the previous papers: the quantization of the electronic orbit of an electron in a magnetic field. I proved that, in this way, I can completely explain Kapitza's results.

The mathematical approach used in this work is that one already familiar in quantum statistical mechanics: I integrated the Schrödinger equation using Dirac's method, in order to obtain the transition probabilities between various quantum states; then, I solved the continuity equation of the Fermi statistics, in order to obtain the stationary distribution on the energy levels. When the magnetic field tends to zero, the discrete spectrum tends to a continuous one, and the sums over the whole discrete spectrum tends to the integrals over the continuum one. The difference between the sum and the integral, given by the rest of Euler's summation formula, contains the quadratic effect, previously mentioned. For very strong magnetic fields, only the first term in the series is important, and we get the linear low discovered by Kapitza. As the quantization does not depend on the direction of the magnetic field with respect to the current, our theory provides also the explanation of the second result obtained by Kapitza.

1 Introduction

For a long time, it is known that the resistance of a metallic conductor is influenced by the presence of a magnetic field, and the change of the resistance is, at least for small values of the magnetic field, quadratic in this quantity. Qualitatively, this effect can be explained simply: the magnetic field curves the electronic trajectory, so the electron which leaves a point A will travel on a longer way, to reach a certain point B of the crystal lattice. But a longer electron path means a larger number of collisions with the lattice ions, so an increase of the resistance. As the effect must be independent of the orientation of the magnetic field, the series expansion of the resistance in powers of the magnetic field will contain only even powers; for low fields, the series can be cut after the quadratic term.

In this approximation, it is not difficult to develop a quantitative approach and to calculate the coefficients. The problem has been solved by Sommerfeld [1], for a degenerate electron gas. However, the theoretical results cannot explain the experimental findings; firstly, according to this theory, a magnetic field parallel to the electric current should not have any influence on resistance; but, in fact, the effect of a longitudinal magnetic fields is not only present, but it has the same order of magnitude as the transversal one. Secondly, the value of the coefficient, obtained theoretically, is much smaller than the experimental value. It is important to mention that the value of this coefficient depends strongly on the sample preparation, as shown by Kapitsa [2]. Thirdly, as Kapitsa's experiments have shown [2], for larger magnetic fields, the quadratic dependence is replaced by a linear one. So, a plot of the relative dependence of the resistance on the magnetic field is linear, and its slope is independent of the sample preparation; however, the starting point of this line depends on sample preparation.

In order to obtain an agreement between theory and experiment, Frank [3] applied Sommerfeld theory, treating carefully the magnetic field. The first two difficulties, mentioned in the previous paragraph, persist in Frank's theory too; however, for the magnetic field dependence of the resistance, Frank obtains a complicated formula, which gives a quadratic behavior for small fields, and saturates at large fields. As, near the inflexion point, the dependence is linear, Frank considered that his theory explains Kapitsa's results.

In order to remove the first difficulty, Bloch [4] tried to take into consideration the effect of the magnetic field on the electron spin. In a magnetic field, a spin parallel to the magnetic field is privileged, in the sense that, according to Pauli principle, such an orientation has an influence on the electronic velocity distribution, which produces a change of the resistance. Clearly, this change is independent on the direction of the magnetic field. The detailed calculations give a quadratic dependence on the magnetic field, but the coefficient is still too small.

The problem has been also considered by Peierls [5]. Peierls improves the Sommerfeld model, taking into consideration the crystal lattice forces. It is well known that the wave function of an electron in a lattice is a modulated plane wave [6], but the energy dependence on wave numbers is more complicated than in the case of a free electron. The dependence of the collision time (the time between two successive collisions of the electron with the lattice) on field direction is essential for the Peierls' approach of resistance change in a magnetic field. This anisotropy explains the similar behaviors in transverse and longitudinal field. As the detailed aspects of this anisotropy are not known, Peierls' theory cannot produce quantitative conclusions. To obtain the correct order of magnitude of the change in resistance, it is compulsory to postulate an surprisingly high anisotropy. The field dependence can be obtained, but only qualitatively: for small fields, the quadratic law is obtained, as expected; however, for large fields, one obtains a saturation. Experimentally, the saturation is observed for semiconductors only; so, the linear dependence, experimentally observed for metals, cannot be obtained from Peierls theory.

There is one more effect of the magnetic field which was not been yet taken into consideration, in order to explain the change of resistance, namely the quantization of electrons in magnetic field. This quantization plays an important role in the theory of diamagnetism (Landau [7], Teller [8]) as, according to the quantum theory, and contrary to the situation predicted by classical physics, the susceptibility of the electron gas is different from zero. This is why we might expect that this quantization has an effect on the resistance, and the goal of this work is to study this effect.

The effect of a magnetic field on the electrons bound in a crystal lattice is a very difficult theoretical issue. However, Peirls [9] has shown that the presence of the magnetic field can be taken into account considering that the electron mass is replaced with an effective one. In our calculations, we shall limit ourselves to this approximation; the spectral term and the eigenfunctions will correspond to the same functions for free electrons, having this effective mass. This simplification of the eigenfunctions is considerable, but, unfortunately, seems very difficult to be avoided. For the calculation of resistance, it is also necessary to evaluate the interaction of electrons with lattice elastic oscillations; to do this, we shall consider an additional potential energy of electrons, proportional, in each point, to the relative increase of the local volume, produced by the lattice oscillations. This simple approach is not essentially different from that used in the traditional theory of electric conduction. By comparing these two theories, the proportionality coefficient could be obtained, but this exercise is not necessary for our approach.

More than that, we shall do our calculation in the hypothesis made by Bloch, i.e. the lattice oscillations are in thermal equilibrium. The results obtained using this hypothesis are in good agreement with experiment; also, we can argue that Peierls' objections concerning this hypothesis are less motivated in the case of a real lattice, than in the case of an ideal one.

Finally, we have to stress that, in the present research, the magnetic field is not treated as a small perturbation, but it is taken into account exactly, even in the zeroth-order approximation. Only the elastic oscillations and the electric fields are treated as perturbations.

2 The change of resistance in a transverse magnetic field

In classical mechanics, the equations of motion of an electron moving in a magnetic and an electric field, mutually perpendiculars, can be integrated very easily. The movement parallel to the magnetic field is uniform. In the simplest situation, the transversal movement (with respect to the previous one) is a uniform translation, along a line perpendicular on both fields; in the general case, an oscillation having the center on this line, is added. In any case, the time average of the component of the velocity, parallel to the electric field, is zero. If we use this result for our problem, one gets that the electron gas has not a component of the electric current, parallel to the electric field. But if this gas feels the influence of the thermal movement of the lattice, it is possible that the axis of the trajectory of each electron is affected by a secular drift and, in this way, an electric current parallel to the electric field can be generated. We can easily see that this is indeed the case, if we consider the perturbation produced by the lattice oscillations as a sort of friction, and presume that the friction force is proportional to the velocity and opposite to it.

Denoting $-\alpha$ $(\alpha > 0)$ this proportionality constant, the equations of movement in an orthogonal system, with the Ox axis parallel to the electric field F and Oz axis parallel to the magnetic field H, have the following form:

$$m\frac{dv_x}{dt} = -eF - \frac{e}{c}v_y H - \alpha v_x, \tag{A}$$

$$m\frac{dv_y}{dt} = \frac{e}{c}v_x H - \alpha v_y, \tag{B}$$

$$m\frac{dv_z}{dt} = -\alpha v_z.$$

We shall hereafter disregard the movement along the Oz axis.

The simplest movement, parallel to the Oxy plane, is given by:

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{dv_x}{dt} = 0.$$

One easily obtains:

$$v_x = -\frac{eF\alpha}{\alpha^2 + \frac{e^2}{c^2}H^2}, \quad v_y = -\frac{\frac{e}{c}FH}{\alpha^2 + \frac{e^2}{c^2}H^2}.$$

We are looking the general solution in the form:

$$v_x = -\frac{eF\alpha}{\alpha^2 + \frac{e^2}{c^2}H^2} + v'_x, \quad v_y = -\frac{\frac{e}{c}FH}{\alpha^2 + \frac{e^2}{c^2}H^2} + v'_y,$$

and we get for (A) and (B) the equations:

$$m\frac{dv'_x}{dt} = -\frac{e}{c}v'_y H - \alpha, \quad m\frac{dv'_y}{dt} = \frac{e}{c}v'_x H - \alpha v'_y,$$

or, for the quantity

$$u = v'_x + iv'_y$$

the equation:

$$m\frac{du}{dt} = \left(-\alpha + i\frac{eH}{c}\right)u$$

The solution of this final equation is:

$$u = Ce^{-\frac{\alpha}{m}t}e^{i\frac{eH}{mc}t}, \quad C = \text{complex}$$

Due to the damping factor, the contributions of the terms $v'_x,\ v'_y$ are irrelevantly for our discussion, so we can restrict our attention to the simple solution.

Let us firstly notice that the component v_x, and consequently the component of the electric current, proportional with v_x, are non-zero. The electric resistance [resistivity] is defined by:

$$\rho = \frac{s_x}{s_x^2 + s_y^2}F. \qquad //1 \tag{1}$$

If the friction can be considered small, the term s_x, being a consequence of friction, is much smaller than s_y, and can be neglected in the denominator of (1). Then, (1) takes the form:

$$\rho = \frac{s_x}{s_y^2}F$$

It might be interesting to notice that, in the same approximation, the Hall constant, defined in general through the equation:

$$R = -\frac{s_y}{s_x^2 + s_y^2}\frac{F}{H}$$

becomes

$$R = -\frac{1}{s_y}\frac{F}{H}$$

If the friction is absent, the problem can be easily solved in the quantum mechanical case too, and the results are very similar to those just obtained, classically. If we use the vector potential in the gauge $A_x = A_z = 0,\ A_y = Hx$, the Hamiltonian of the problem under scrutiny is:

$$W = \frac{1}{2m}\left[p_x^2 + \left(p_y + \frac{eH}{c}x\right)^2 + p_z^2\right] + eFx \tag{2}$$

where m is the effective electron mass, and $-e,$ the electron charge. It is easy to see that p_y, p_z commute with W, so these quantities can be considered as numbers, if we write the eigenfunctions as

$$f(x)\, e^{\frac{i}{\hbar}(p_y y + p_z z)}$$

The Hamiltonian can be expressed as:

$$W = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2}{2}\left(x + \frac{p_y}{m\omega_0} + \frac{eF}{m\omega_0^2}\right)^2 + \frac{p_z^2}{2m} - \frac{e^2F^2}{2m\omega_0^2} - \frac{eFp_y}{m\omega_0} =$$

$$= \frac{p_x^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2}{2}(x - x_0)^2 + \frac{p_z^2}{2m} + eFx_0 + \frac{1}{2}\frac{e^2F^2}{m\omega_0^2};$$

with ω_0 - the Larmor frequency and

$$x_0 = -\frac{p_y}{m\omega_0} - \frac{eF}{m\omega_0^2}.$$

From this form of the Hamiltonian, we can see immediately that the factor of the wave function which depends on x only, $\varphi(x - x_0)$, is the well-known eigenfunction of an oscillator of mass m, frequency ω_0 and equilibrium position x_0. Expressing now p_x in terms of x_0 and p_z in terms of its quantum number $l = p_z/\hbar$, the eigenfunctions of the Hamiltonian W are:

$$\psi_{n,x_0,l} = \varphi(x - x_0)\, e^{-i\frac{eF}{\hbar\omega_0}y} e^{-i\frac{m\omega_0}{\hbar}x_0 y} e^{ilz} \tag{3}$$

and the corresponding eigenenergies:

$$E_{n,x_0,l} = \hbar\omega_0\left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{\hbar^2}{2m}l^2 + eFx_0 \tag{4}$$

if we disregard the additive constant

$$\frac{1}{2}\frac{e^2F^2}{m\omega_0^2}.$$

x_0 is the average of x; so, the average of v_x is the time derivative of x_0. In the absence of any perturbation, $v_x = 0$. It is natural to presume that, in this case too, due to the thermal movement of the lattice, x_0 does not remain constant in time, but varies somehow with time; we shall hereafter examine in detail this aspect. In this case, the electric current in the x direction can be calculated directly, from its definition: we consider an area perpendicular on the Ox axis; the $x-$component of the electric current is the difference between the number of electrons travelling in a unit time from the negative to the positive half-space, and the number of electrons travelling from the positive to the negative half-space, multiplied by the electron charge. The current density is obtained by dividing this result to the value of that area.

To calculate the electric resistance, we have to take into account the current in the $y-$direction too. As

$$v_y = \frac{1}{m}\left(p_y + \frac{eH}{c}x\right)$$

we get, from the expression of the average:

$$\overline{v}_y = \frac{1}{m}\left(p_y + \frac{eH}{c}\overline{x}\right) = \frac{1}{m}\left(p_y + \frac{eH}{c}\overline{x}_0\right) = -\frac{eF}{m\omega_0} \tag{5}$$

i.e. a result corresponding exactly to the classical value of the average of the velocity, perpendicular on both fields. We can see that, in this simplified model, we obtain only the normal Hall effect.

The current density in the Oy direction is:

$$s_y = \frac{e^2\nu}{mc\omega_0}F, \tag{6}$$

where v in the number of electrons in a unity volume.

3 Electron-lattice interaction

As explained in the Introduction, we shall investigate the influence of a perturbation whose energy is proportional to the local volume expansion:

$$W' = D \operatorname{div} \overrightarrow{u}$$

with $\overrightarrow{u}$ - the displacement of a lattice point, and D - a proportionality factor.

In order to ease the evaluation of statistical weights, it is convenient to confine the system into a cube of size L, parallel to the coordinate axes, and to assume that all the spatial properties of the system are periodical, with period L, along all coordinate axes. For the electron eigenfunctions, the periodicity condition cannot be rigorously fulfilled in the Ox direction; but, if we take into consideration that the oscillator eigenfunctions tend exponentially to zero, for large L, we can always choose L large enough, in fact larger than the interval where these eigenfunctions are significantly non-zero; after that, the eigenfunctions can be easily continued, as periodic functions. Due to the same property - exponentially decrease of these functions at large distances - the integrals over the values of x can be extended to an integral from $-\infty$ to $+\infty$.

From the periodicity condition, one can conclude that the quantum numbers $l,\ x_0$ will have only discrete values:

$$\begin{cases} l = \frac{2\pi}{L}g \quad (g \ - \ \text{integer}) \\ x_0 = -\frac{eF}{m\omega_0^2} + \frac{\hbar}{m\omega_0}\frac{2\pi}{L}g' \quad (g' \ - \ \text{integer}) \end{cases} \tag{7}$$

We decompose the lattice thermal movement in consecutive plane waves. We shall restrict ourselves to longitudinal waves, as only these waves are responsible for dilatation:

$$\vec{u} = \sum \vec{u}_{\vec{f}}, \quad \vec{u}_{\vec{f}} = \frac{\vec{f}}{f}\left[b_{\vec{f}} e^{i\left(\vec{f}\vec{r}-\omega t\right)} + b^*_{\vec{f}} e^{-i\left(\vec{f}\vec{r}-\omega t\right)}\right]$$

where $\frac{L}{2\pi}\vec{f}$ is an integer vector, and $f = \left|\vec{f}\right|$. As we know from the solid state theory, the quantities b are the operators:

$$b^*_{\vec{f}} = \sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega}}\sqrt{N_{\vec{f}}+1}\Delta^+_{\vec{f}}, \quad b_{\vec{f}} = \sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega}}\sqrt{N_{\vec{f}}}\Delta^-_{\vec{f}}$$

where M is the mass of the lattice contained in the cube of size L, $N_{\vec{f}}$ is the occupation number of the corresponding eigen-oscillation, and $\Delta^{(+)}_{\vec{f}}$, $\Delta^{(-)}_{\vec{f}}$ are the operators which transform the states with occupation numbers $N_{\vec{f}}$, in states with occupation numbers $N_{\vec{f}}+1$, $N_{\vec{f}}-1$.

We shall hereafter neglect the dispersion of elastic waves, considering a constant propagation velocity of the waves, according to the relation:

$$\omega = wf$$

Under the influence of the lattice thermal movement, the electrons will jump from a state to another. As the perturbation is linear in b, this jump is accompanied by a shift of the quantum number of any normal lattice oscillation, with the value ± 1.Due to the analogy with the radiation theory, will shall call these elementary processes "absorption" and "emission" of a vibrational quanta.

We shall use a shorter notation, q, for the electron quantum numbers. In this way, we can easily compute, using the method of variation of constants, the probability of elementary processes. The transition probability per time unit for the transition $q \to q'$, with the absorption of a $\vec{f}$-type quanta is given by:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{D^2}{\hbar M\omega} f \left|\left(e^{i\left(\vec{f}\vec{r}\right)}\right)_{qq'}\right|^2 \frac{1-\cos\left(\frac{E_{q'}-E_q}{\hbar}-\omega\right)t}{\left(\frac{E_{q'}-E_q}{\hbar}-\omega\right)^2} N_{\vec{f}} \tag{9a}$$

Similarly, for the same transition, with the emission of a vibrational quanta:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{D^2}{\hbar M\omega} f \left|\left(e^{-i\left(\vec{f}\vec{r}\right)}\right)_{qq'}\right|^2 \frac{1-\cos\left(\frac{E_{q'}-E_q}{\hbar}-\omega\right)t}{\left(\frac{E_{q'}-E_q}{\hbar}-\omega\right)^2} \left(N_{\vec{f}}+1\right) \tag{9b}$$

The symbol $(\Phi)_{q'q}$ defines the matrix element of the function Φ :

$$(\Phi)_{q'q} = \int \Phi\psi^*_{q'}\psi_q d\tau$$

where the integral is extended over the cube of size L.

From the previous formulas, we immediately obtain the selection rules:

$$l' = l + f_z, \quad x_0' = x_0 - \frac{\hbar}{m\omega_0} f_y \tag{10a}$$

for an absorption, and

$$l' = l + f_z, \quad x_0' = x_0 - \frac{\hbar}{m\omega_0} f_y \tag{10b}$$

for an emission.

If these selection rules are satisfied, the matrix element is non-zero, and has the value:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{if_x x} \varphi_{n'}\left(x - x_0\right) \varphi_n\left(x - x_0\right) dx$$

respectively:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-if_x x} \varphi_{n'}\left(x - x_0\right) \varphi_n\left(x - x_0\right) dx$$

for an emission, respectively for an absorption. The squared modulus is the same in both situations, and it will be denoted $W_{nn'}\left(f_x, x_0, x_0'\right)$. Later on, these functions will play a key role, so we shall investigate here their most important properties.

Let us start with the integral:

$$J_{nn'} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{if_x x} \varphi_{n'}\left(x - x_0\right) \varphi_n\left(x - x_0\right) dx$$

which has the property:

$$\left|J_{nn'}\right|^2 = W_{nn'}.$$

Let us make a change of integration variable and of function:

$$t = \sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}} x, \quad \Phi_n\left(t\right) = \sqrt[4]{\frac{\hbar}{m\omega_0}} \varphi_{n'}\left(x\right)$$

Now, the functions $\Phi_n\left(t\right)$ are the normalized eigenfunctions of the problem [the Hermite functions, editor's note]:

$$\frac{d^2\ \Phi_n\left(t\right)}{dt^2} + \left(2n + 1 - t^2\right)\ \Phi_n\left(t\right) = 0$$

As we know, for this equation there is a generating function:

$$e^{-\frac{t^2}{2} + 2ut - u^2} = \sum_0^\infty \sqrt{\frac{\sqrt{\pi} 2^n}{n!}} \Phi_n\left(t\right) u^n.$$

With these new notations, $J_{nn'}$ can be written as:

$$J_{nn'} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}f_x t}\Phi_n\left(t - \sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}x_0\right)\Phi_{n'}\left(t - \sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}x'_0\right)dt$$

Multiplying the two series:

$$\exp\left[-\frac{1}{2}\left(t - \sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}x_0\right)^2 + 2u\left(t - \sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}x_0\right) - u^2\right] =$$

$$= \sum_0^\infty \sqrt{\frac{\sqrt{\pi}2^n}{n!}}\Phi_n\left(t - \sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}x_0\right)u^n \tag{a}$$

$$\exp\left[-\frac{1}{2}\left(t - \sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}x'_0\right)^2 + 2u\left(t - \sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}x'_0\right) - v^2\right] =$$

$$= \sum_0^\infty \sqrt{\frac{\sqrt{\pi}2^{n'}}{n'!}}\Phi_{n'}\left(t - \sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}x'_0\right)v^{n'} \tag{b}$$

then multiplying their product by $e^{i\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}f_x t}$ and integrating over t from $-\infty$ to $+\infty$, we obtain a generating function for the J functions:

$$\exp\left[2uv + \left(i\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}f_x + \sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}\left(x'_0 - x_0\right)\right)\left(i\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}f_x - \sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}\left(x'_0 - x_0\right)\right)\right]\cdot$$

$$\cdot\exp\left[-\frac{1}{4}\frac{\hbar}{m\omega_0}f_x^2 - \frac{1}{4}\frac{m\omega_0}{\hbar}\left(x_0 - x'_0\right)^2 + \frac{i}{2}f_x\left(x_0 + x'_0\right)\right] = \tag{11}$$

$$= \sum_0^\infty\sum_0^\infty \sqrt{\frac{2^{n+n'}}{n!n'!}}J_{nn'}u^n v^{n'}$$

From here, we get that the functions $J_{nn'}$ equal the exponential function:

$$\exp\left[-\frac{1}{4}\frac{\hbar}{m\omega_0}\left(x_0 - x'_0\right)^2 f_x^2 - \frac{1}{4}\frac{m\omega_0}{\hbar}f_x^2 + \frac{i}{2}f_x\left(x_0 + x'_0\right)\right]$$

multiplied by a polynomial in

$$\left(i\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}f_x + \sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}\left(x'_0 - x_0\right)\right)$$

and

$$\left(i\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}f_x - \sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}\left(x'_0 - x_0\right)\right)$$

and that $W_{nn'} = |J_{nn'}|^2$ depends only on the quantity:

$$\alpha^2 = \frac{\hbar}{m\omega_0} - f_x^2 + \frac{m\omega_0}{\hbar}(x_0 - x_0')^2 = \frac{\hbar}{m\omega_0}\left(f_x^2 + f_y^2\right),$$

according to the selection rules. So, in order to obtain the general, complete form of all the $W_{nn'}$ functions, is enough to study $J_{nn'}$ in the special case when $f_x = 0$ and $\sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}(x_0' - x_0) = \alpha$. We can obtain all the $W_{nn'}$ functions, simply taking the square of this quantity, and replacing α^2 with $\frac{\hbar}{m\omega_0}\left(f_x^2 + f_y^2\right)$. In this special case, the generating function is:

$$F(u, v, \alpha) = e^{2uv + \alpha(u-v) - \alpha^2/4} = \sum_0^\infty \sum_0^\infty \sqrt{\frac{2^{n+n'}}{n!n'!}} J_{n'n}(\alpha)\, u^n v^{n'}. \tag{11'}$$

It is easy to check that the function F satisfies the following differential equation:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial F}{\partial \alpha} + \left(1 - \frac{\alpha^2}{4}\right) F =$$

$$= \frac{1}{\alpha^2}\left[u^2 \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + v^2 \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} - 2uv \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}\right] + \left(\frac{1}{\alpha^2} - 1\right)\left(u\frac{\partial F}{\partial u} + v\frac{\partial F}{\partial v}\right).$$

Replacing, in this equation, the function F with its series expansion, and comparing the coefficients of corresponding powers, we find that $J_{nn'}$ satisfies the following differential equation:

$$\frac{d^2 J_{nn'}}{d\alpha^2} + \frac{1}{\alpha}\frac{dJ_{nn'}}{d\alpha} + \left(n + n' + 1 - \frac{(n - n')^2}{\alpha^2}\right) J_{nn'} = 0.$$

Later on, will shall replace by integrals, the sums of some expressions by integrals, containing the W functions. To do this, it is necessary to calculate the W functions from this differential equation, using Kramers' method. We shall replace the square of the oscillating factor, by its average value, obtaining:

$$W_{nn'} \simeq \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{(n + n' + 1)\,\alpha^2 - (n - n')^2 - \frac{\alpha^4}{4}}}. \tag{12}$$

Let us note the normalization starting with the representation:

$$W_{nn'}\left(\alpha^2\right) = W_{nn'}\left(x^2 + y^2\right) =$$

$$= \left|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixs}\Phi_n(s + y)\,\Phi_{n'}(s)\, ds\right|^2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix(s-t)} \Phi_n (s+y) \Phi_n (t+y) \Phi_{n'} (s) \Phi_{n'} (t) \, dsdt$$

One obtains:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_{nn'} \left(x^2 + y^2\right) dxdy = 2\pi \int_0^{\infty} W_{nn'} \left(\alpha^2\right) \alpha d\alpha$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix(s-t)} \Phi_n (s+y) \Phi_n (t+y) \Phi_{n'} (s) \Phi_{n'} (t) \, dsdtdxdy.$$

The integration over x gives, using Dirac's symbol, $2\pi\delta (s-t)$; after that, the integration over t can be easily done, and one obtains for the r.h.s. of (12a) the following result:

$$2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_n (s+y) \Phi_n (s+y) \Phi_{n'} (s) \Phi_{n'} (s) \, dsdy.$$

Due to the normalization of functions Φ, the integration over y gives 1, and, after that, the last integration gives 1 again, so:

$$\int_0^{\infty} W_{nn'} \left(\alpha^2\right) \alpha d\alpha = 1$$

The numerical factor in (12) is chosen in such a way, that:

$$\frac{1}{\pi} \int \frac{\alpha d\alpha}{\sqrt{(n+n'+1)\,\alpha^2 - (n-n')^2 - \frac{\alpha^4}{4}}} = 1,$$

where the integration limits are given by the positive solutions of the equation which gives the zeros of the denominator.

4 The stationary distribution function

In order to calculate the current, we must firstly obtain the time-independent distribution function. It is easy to show that the Fermi function

$$\chi_q = \frac{1}{\exp\left(-\frac{\varepsilon_q - -E_0}{kT}\right) + 1}$$

where ε_q is the energy without the contribution of the electric field:

$$\varepsilon_q = \hbar\omega_0 \left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{\hbar^2}{2m} l^2, \tag{13}$$

is time-independent, if we restrict ourselves to linear terms in the electric field F.

We shall demonstrate this property of χ_q, calculating its time derivative. It is the difference between the number of electrons arriving in the state ε_q, minus the number of electrons leaving this state, in a time unit:

$$\widetilde{\chi}_q = \frac{D^2}{M\hbar w}\frac{\partial}{\partial t}\sum_{q'}\sum_{\overrightarrow{f}} fW_{nn'}\{...\}$$

where the expression between the accolades is:

$$... = \left[\chi_{q'}(1-\chi_q)N_{\overrightarrow{f}} - \chi_q(1-\chi_{q'})\left(N_{\overrightarrow{f}}+1\right)\right]\frac{1-\cos\left(\frac{E_{q'}-E_q}{\hbar}+\omega\right)t}{\left(\frac{E_{q'}-E_q}{\hbar}-\omega\right)^2}+$$

$$+\left[\chi_{q'}(1-\chi_q)\left(N_{\overrightarrow{f}}+1\right) - \chi_q(1-\chi_{q'})N_{\overrightarrow{f}}\right]\frac{1-\cos\left(\frac{E_{q'}-E_q}{\hbar}-\omega\right)t}{\left(\frac{E_{q'}-E_q}{\hbar}-\omega\right)^2}$$

The r.h.s. of the equation for $\widetilde{\chi}_q$ is zero if $F=0$, due to the well-known stationarity of the Fermi function, in this special case. Also, the r.h.s. depends on F only through the functions $E_{q'}-E_q$, so F enters only in the combination $eF(x_0'-x_0)$. The first order term in the series expansion in F is, consequently, the product of this combination, and an even function of $(x_0'-x_0)$. Due to the summation over x_0', this first-order term vanishes, and our statement is demonstrated. It is important to notice that we did not impose any restriction on the temperature.

5 The current

Let us calculate now the $x-$component of the current, using the method exposed in Section 2. Choosing as "wall" the plane $x=0$, we have:

$$S_x = -\frac{eD^2}{M\hbar w}\frac{\partial}{\partial t}\sum_n\sum_{n'}\sum_{l,l'}\sum_{x_0<0}\sum_{x_0'>0}\sum_{\overrightarrow{f}} fW_{nn'}\cdot$$

$$\cdot\left\{\left[\chi_q(1-\chi_{q'})N_{\overrightarrow{f}} - \chi_{q'}(1-\chi_q)\left(N_{\overrightarrow{f}}+1\right)\right]\frac{1-\cos\left(\frac{E_{q'}-E_q}{\hbar}-\omega\right)t}{\left(\frac{E_{q'}-E_q}{\hbar}-\omega\right)^2}+\right. \quad (14)$$

$$\left.\left[\chi_q(1-\chi_{q'})\left(N_{\overrightarrow{f}}+1\right) - \chi_{q'}(1-\chi_q)N_{\overrightarrow{f}}\right]\frac{1-\cos\left(\frac{E_{q'}-E_q}{\hbar}+\omega\right)t}{\left(\frac{E_{q'}-E_q}{\hbar}-\omega\right)^2}\right\}.$$

Firstly, we get rid of f_y and f_z using the selection rules, and secondly, we replace the summation over l, l', x_0, x'_0 and f_x with integrals. The weight of each differential dl, dl', df_x is $L/2\pi$, and of dx_0 and dx'_0 is $\frac{m\omega_0}{\hbar}\left(L/2\pi\right)$, according to (7).

$$S_x = -\frac{eD^2}{M\hbar w}\left(\frac{L}{2\pi}\right)^5\left(\frac{m\omega_0}{\hbar}\right)^2\frac{\partial}{\partial t}\sum_{n,n'}\int_{x_0<0,x'_0>0} dl dl' df_x dx_0 dx'_0 f W_{nn'}\cdot$$

$$\cdot W_{nn'}\left\{\left[\chi_q\left(1-\chi_{q'}\right)N-\chi_{q'}\left(1-\chi_q\right)(N+1)\right]\frac{1-\cos\left(\frac{E_{q'}-E_q}{\hbar}-\omega\right)t}{\left(\frac{E_{q'}-E_q}{\hbar}-\omega\right)^2}+\right.$$

$$\left.\left[\chi_q\left(1-\chi_{q'}\right)(N+1)-\chi_{q'}\left(1-\chi_q\right)N\right]\frac{1-\cos\left(\frac{E_{q'}-E_q}{\hbar}+\omega\right)t}{\left(\frac{E_{q'}-E_q}{\hbar}-\omega\right)^2}\right\}$$

Introducing the new variables $u = l + l'$, $v = l - l'$, one gets:

$$S_x = -\frac{eD^2}{M\hbar w}\left(\frac{L}{2\pi}\right)^5\left(\frac{m\omega_0}{\hbar}\right)^2\frac{\partial}{\partial t}\sum_{n,n'}\int_{x_0<0,x'_0>0} du dv df_x dx_0 dx'_0 f\cdot$$

$$\cdot W_{nn'}\left\{\left[\chi_q\left(1-\chi_{q'}\right)N-\chi_{q'}\left(1-\chi_q\right)(N+1)\right]\frac{1-\cos\left(\frac{E_{q'}-E_q}{\hbar}-\omega\right)t}{\left(\frac{E_{q'}-E_q}{\hbar}-\omega\right)^2}+\right. \quad (15)$$

$$\left.+\left[\chi_q\left(1-\chi_{q'}\right)(N+1)-\chi_{q'}\left(1-\chi_q\right)N\right]\frac{1-\cos\left(\frac{E_{q'}-E_q}{\hbar}+\omega\right)t}{\left(\frac{E_{q'}-E_q}{\hbar}-\omega\right)^2}\right\}$$

We shall first integrate upon u. Using the δ-function properties of the ratios

$$\frac{1-\cos\Omega t}{\Omega^2},$$

by the fact that we introduce for u, in all the other integration factors, the solution of the equation, and integrate only the ratios. Both terms give the same result:

$$\pi t\frac{2m}{\hbar}\frac{1}{|v|}$$

Introducing this result in eq. (15) and taking the derivative upon t, we get:

$$S_x = -\pi \frac{m}{\hbar} \frac{eD^2}{M\hbar w} \left(\frac{L}{2\pi}\right)^5 \left(\frac{m\omega_0}{\hbar}\right)^2 \cdot$$

$$\cdot \sum_{n,n'} \int_{x_0<0, x_0'>0} dv dx_0 dx_0' df_x \left(A+B\right),$$

where:

$$A = \frac{f}{|v|} W_{nn'} \left[\chi_q \left(1-\chi_{q'}\right) N - \chi_{q'} \left(1-\chi_q\right) (N+1)\right],$$

$$B = \frac{f}{|v|} W_{nn'} \left[\chi_q \left(1-\chi_{q'}\right) (N+1) - \chi_{q'} \left(1-\chi_q\right) N\right].$$

In A, we replace u with the solution of the equation:

$$E_{q'} - E_q - \hbar\omega = 0 \tag{17a}$$

and in B, with the solution of the equation:

$$E_{q'} - E_q + \hbar\omega = 0 \tag{17b}$$

Now, we shall expand S_x in the powers of the electric field F.

The zero-order term is zero, as in this approximation, $A = B = 0$. For $F = 0$, eqn.(17a), (17b) take the form:

$$\varepsilon_{q'} - \varepsilon_q - \hbar\omega = 0 \tag{18a}$$

$$\varepsilon_{q'} - \varepsilon_q + \hbar\omega = 0 \tag{18b}$$

As χ_q is the Fermi function of variable ε_q, and N is the Planck function of variable $\hbar\omega/kT$, the vanishing of A and B due to the relations (18a), (18b) can be easily checked.

In order to obtain the first order term, we make in N the replacement $\hbar\omega \to \varepsilon_{q'} - \varepsilon_q + eF\left(x_0' - x_0\right)$, respectively $\hbar\omega \to \varepsilon_q - \varepsilon_{q'} - eF\left(x_0 - x_0'\right)$ and expand in powers of $eF\left(x_0' - x_0\right)$. The first terms in A, B are:

$$A_1 = \frac{f}{|v|} W_{nn'} \frac{eF\left(x_0' - x_0\right)}{kT} N\left(N+1\right)\left(\chi_{q'} - \chi_q\right) \tag{19a}$$

$$B_1 = \frac{f}{|v|} W_{nn'} \frac{eF\left(x_0 - x_0'\right)}{kT} N\left(N+1\right)\left(\chi_{q'} - \chi_q\right) \tag{19b}$$

[eqs. (19a), (19b) are incorrectly numbered in the original paper, as (18a), (18b), respectively, editor's note]

The factors $N\left(N+1\right)\left(\chi_{q'} - \chi_q\right)$ still depend, through u, on F, but if we restrict ourselves to first order contributions in F, it is necessary to put $F = 0$

in these terms, i.e. to consider that u is the solution of eq. (18a) or (18b), respectively. This will be indeed our choice, from now on.

Replacing now A_1 and B_1 in the formula for S_x, and in the new integration variables $r = x_0' - x_0,\ s = x_0' + x_0$, one gets:

$$S_x = -\frac{\pi}{2}\frac{eF}{kT}\frac{eD^2}{M\hbar w}\left(\frac{L}{2\pi}\right)^5\left(\frac{m\omega_0}{\hbar}\right)^2\sum_{n,n'}\int dvdrdsdf_x r\left(A_1 - B_1\right)$$

The integration is done for $s \in (-r, r)$, and $r \in (0, \infty)$. As the integrand is $s-$independent, the integration over s is trivial:

$$S_x = -\frac{\pi}{2}\frac{eF}{kT}\frac{eD^2}{M\hbar w}\left(\frac{L}{2\pi}\right)^5\left(\frac{m\omega_0}{\hbar}\right)^2\sum_{n,n'}\int drdvdf_x r^2\left(A_1 - B_1\right).$$

The integrand depends on r^2 only; as one integrates only over positive values of r, we can replace allover, according to the selection rule (10), $r = x_0' - x_0$ with $\frac{\hbar}{m\omega_0} f_y$ and integrate over f_y from 0 to ∞ :

$$S_x = -\pi\frac{eF}{kT}\frac{eD^2}{M\hbar w}\left(\frac{L}{2\pi}\right)^5\left(\frac{\hbar}{m\omega_0}\right)\sum_{n,n'}\int df_x df_y dv f_x^2\left(A_1 - B_1\right).$$

Introducing for the surface $f_x,\ f_y$ the polar coordinates:

$$f_x = f'\cos\theta, \quad f_y = f'\sin\theta$$

and integrating over θ from 0 to π, we obtain for S_x:

$$S_x = -\frac{\pi^2}{2}\frac{eF}{kT}\frac{eD^2}{M\hbar w}\left(\frac{L}{2\pi}\right)^5\frac{\hbar}{m\omega_0}\sum_{n,n'}\int df' dv f'^3\left(A_1 - B_1\right).$$

As the integrand is an even function of v, we can integrate over $(0, \infty)$ and multiply the result by 2. Then we can replace $|v|$ by f_z (according to the selection rules):

$$S_x = \pi^2\frac{eF}{kT}\frac{eD^2}{M\hbar w}\left(\frac{L}{2\pi}\right)^5\frac{\hbar}{m\omega_0}\sum_{n,n'}\int df' df_z f'^3\left(A_1 - B_1\right).$$

We can progress with our calculation using the expressions for ε_q and $\varepsilon_{q'}$, from which l, l' are eliminated using the selection rules and the energy conservation law.

For A_1, we get:

$$\varepsilon_q = \frac{\hbar\omega}{2}\left(n + n' + 1\right) + \frac{\hbar^2}{8m}f_z^2 + \frac{m}{2f_z^2}\left[\omega - \omega_0\left(n' - n\right)\right]^2 - \frac{\hbar\omega}{2},$$

$$\varepsilon_{q'} = \frac{\hbar\omega}{2}\left(n + n' + 1\right) + \frac{\hbar^2}{8m} f_z^2 + \frac{m}{2f_z^2}\left[\omega - \omega_0\left(n' - n\right)\right]^2 + \frac{\hbar\omega}{2},$$

and for B_1 :

$$\varepsilon_{q} = \frac{\hbar\omega}{2}\left(n + n' + 1\right) + \frac{\hbar^2}{8m} f_z^2 + \frac{m}{2f_z^2}\left[\omega + \omega_0\left(n' - n\right)\right]^2 + \frac{\hbar\omega}{2},$$

$$\varepsilon_{q'} = \frac{\hbar\omega}{2}\left(n + n' + 1\right) + \frac{\hbar^2}{8m} f_z^2 + \frac{m}{2f_z^2}\left[\omega + \omega_0\left(n' - n\right)\right]^2 - \frac{\hbar\omega}{2},$$

With the notations:

$$X = \frac{1}{kT}\left\{\frac{\hbar\omega_0}{2}\left(n + n' + 1\right) + \frac{\hbar^2}{8m} f_z^2 + \frac{m}{2f_z^2}\left[\omega - \omega_0\left(n' - n\right)\right]^2 - E_0\right\} \quad (20a)$$

$$X' = \frac{1}{kT}\left\{\frac{\hbar\omega_0}{2}\left(n + n' + 1\right) + \frac{\hbar^2}{8m} f_z^2 + \frac{m}{2f_z^2}\left[\omega + \omega_0\left(n' - n\right)\right]^2 - E_0\right\} \quad (20b)$$

and

$$\xi = \frac{\hbar\omega}{kT},$$

we obtain the following expression for the current:

$$S_x = L^2 \frac{D^2}{32\pi^3}\frac{e^2F}{kT}\frac{1}{\delta\hbar w\omega_0}\sum_{n,n'}\int df' df_z \frac{f'^3 f}{f_z} W_{nn'} N\left(N + 1\right)\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{1}{e^{X-\frac{\xi}{2}} + 1} - \frac{1}{e^{X+\frac{\xi}{2}} + 1} + \frac{1}{e^{X'-\frac{\xi}{2}} + 1} - \frac{1}{e^{X'+\frac{\xi}{2}} + 1}\right], \quad (21)$$

where δ is the density of material, $\delta = M/L^3$. We shall denote by K the expression inside the square bracket:

$$K = \frac{1}{e^{X-\frac{\xi}{2}} + 1} - \frac{1}{e^{X+\frac{\xi}{2}} + 1} + \frac{1}{e^{X'-\frac{\xi}{2}} + 1} - \frac{1}{e^{X'+\frac{\xi}{2}} + 1} \quad (22)$$

Now, it is very easy to calculate the resistance. According to its definition, the resistance equals the ratio of the electric field intensity along the direction of current flow, and the module of the current density.

If $s_x,\ s_y$ are the components of the current density, the resistance is:

$$\rho_t = \frac{s_x}{s_x^2 + s_y^2} F \quad (23)$$

s_y comes uniquely from the magnetic field and is non-zero even in the absence of a thermal movement of the lattice [see Section 2]; just contrarily, s_x is generated by this thermal movement itself. If the perturbative effect produced by the lattice oscillations can be considered to be small, then s_y is significantly larger than s_x, and this last quantity can be neglected in the denominator of (23). One obtains the component s_x of the current density, by dividing the current component S_x from (21) to L^2,the area of the transversal section of the metal. We already calculated the component s_y, eq. (6). If we introduce now these expressions in (23) and take into account the neglect discussed in the previous lines, we get:

$$\rho_t = \frac{D^2}{32\pi^3}\frac{m^2\omega_0}{\delta\hbar w e^2}\frac{1}{kT}\sum_{n,n'}\int df' df_z \frac{f'^3 f}{f_z} W_{nn'} N\left(N+1\right) K \tag{24}$$

6 Physical meaning of the general formula for resistance

In order to put the general formula (24) in a more transparent form, we have to use an approximation scheme, as the summation over $n,\ n'$ cannot be done rigorously. For small magnetic fields, this summation can be replaced, in the crudest approximation, by an integration. As the terms $W_{nn'}$ are defined only for integer values of $n,\ n'$, prior to proceed to the integration, they must be replaced by the approximate expressions (12). Let us start with the remark that the polynomial under the square root in (12) is positive only between the roots of the function, when $n \pm \frac{1}{2}$ are positive. This is why these roots can be chosen without problems as integration limits, as they are always situated in the sector $n + \frac{1}{2} \geqslant 0,\ n' + \frac{1}{2} \geqslant 0$.

Introducing the new variables $p = n + n' + 1,\ q = n' - n$, we have the approximate relation:

$$\sum_{n,n'} W_{nn'} K \simeq \frac{1}{2\pi}\int\int \frac{dpdq}{\sqrt{p\alpha^2 - q^2 - \frac{\alpha^4}{4}}} K. \tag{25}$$

We shall firstly integrate over p. This is a very easy task, if the Fermi function is replaced by a step function. In this case, the function

$$\frac{1}{e^{X-\frac{\xi}{2}}+1} - \frac{1}{e^{X+\frac{\xi}{2}}+1} \tag{26}$$

is 1 inside the interval $-\xi/2 < X < \xi/2$ and 0 outside. But, as X is a linear function of p, the expression (26) considered as function of p is 1 in an interval $p_1 < p < p_2$, and 0 outside this interval. So, the integral over the first summand of K is:

$$\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\sqrt{p\alpha^2 - q^2 - \frac{\alpha^4}{4}}} = \frac{2}{\alpha^2}\left[\sqrt{p\alpha^2 - q^2 - \frac{\alpha^4}{4}}\right]_{p_1}^{p_2} \tag{27}$$

(the same can be done with the second summand, involving X'). $p_1,\ p_2$ are the roots of the equations:

$$X+\frac{\xi}{2}=0 \ \ and \quad X-\frac{\xi}{2}=0,$$

so:

$$p_1=-\frac{kT}{\hbar\omega_0}\xi-\frac{m\omega_0}{\hbar}\frac{1}{f_z^2}q^2+P,$$

$$p_2=+\frac{kT}{\hbar\omega_0}\xi-\frac{m\omega_0}{\hbar}\frac{1}{f_z^2}q^2+P,$$

where P denotes other terms, without interest for our investigation. The coefficient of q^2 under the square root in the r.h.s. of eq. (27) becomes

$$-\left(1+\frac{m\omega_0}{\hbar}\frac{\alpha^2}{f_z^2}\right)=-\frac{f^2}{f_z^2}$$

if we replace α^2 with its value

$$\frac{\hbar}{m\omega_0}\left(f_x^2+f_y^2\right).$$

The integration over q of any of the summands in the r.h.s. of (27) is equivalent to the quadrature of a half-ellipse, having one of its axes equal to the square root of the term non-containing q in the expression under the square root of the summand, and the other axis - larger by a factor of f_z/f. Consequently, the result of this integration gives the term non-containing q, multiplied by $(\pi/2)\,(f_z/f)$. The difference of these two integrals over q is, in this way, the difference of terms non-containing q, multiplied by the same factor; the result is:

$$\frac{2}{\alpha^2}\int\left[\sqrt{p\alpha^2-q^2-\frac{\alpha^4}{4}}\right]_{p_1}^{p_2}dq=2\pi\frac{kT}{\hbar\omega_0}\xi\frac{f_z}{f}.$$

The second summand of K gives the same result, so:

$$\sum_{n,n'}W_{nn'}K\cong 2\frac{kT}{\hbar\omega_0}\xi\frac{f_z}{f}.$$

If we replace this result in (27), we get for the resistance the following formula:

$$\rho_t=\frac{D^2}{16\pi^3}\frac{m^2}{\delta\hbar^2we^2}\frac{1}{\nu^2}\sum_{n,n'}\int df'df_zf'^3\xi N\left(N+1\right) \tag{28}$$

After introducing polar coordinates:

$$f_z=f\cos\theta,\quad f'=f\sin\theta$$

the angular integration can be done easily and, substituting f with

$$\xi = \frac{\hbar\omega}{kT} = \frac{\hbar w f}{kT}$$

we get:

$$\rho_t = \frac{D^2}{24\pi^3}\frac{m^2}{\delta\hbar^7 w^6}\frac{1}{e^2\nu^2}(kT)^5\int_0^{\Theta/T}\xi^5\frac{e^\xi}{(e^\xi-1)^2}d\xi \tag{29}$$

The upper limit of this integral is expressed, as usual, in terms of the characteristic temperature of the metal, Θ. Consequently, in the approximation in which the quantization can be neglected, the resistance does not depend on the magnetic field, so, according to our model, this dependence can be considered as a typically quantum effect. It is worth noticing also that, if we apply Bloch's approach for conductivity, in the absence of the magnetic field, to our model, we obtain exactly the formula (29).

7 The change of resistance in small magnetic fields

In order to obtain now, as the next approximation of our calculation, the field dependence, for small magnetic fields, we have to approximate the sum over $n,\ n'$ in a more precise way that we did previously. If we consider the integral as a zero order approximation, we can improve this result, by adding higher order corrections. It is well known that Euler - McLaurin summation formula gives a series expansion for such corrections. We shall evaluate here only the first term of this series. The summation formula is:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{n'=0}^{\infty} f\left(n+\frac{1}{2}, n'+\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty\int_0^\infty f(x,y)\,dxdy+$$
$$+\frac{1}{24}\int_0^\infty f_x(0,y)\,dy + \frac{1}{24}\int_0^\infty f_y(x,0)\,dx.$$

The formula cannot be used in this form, for our problem, because (12) is a good approximation for $W_{nn'}$, but its derivatives with respect to $n,\ n'$ are not any more good approximations for the differences of the W terms. This is why we have to use in our calculations the exact expressions for the differences of the W terms; consequently, instead of integrating over the first quadrant of the surface $n,\ n'$, we have now to sum up over integer values of $n,\ n'$. We need only the values at the border of this surface and the differences in the direction of the inner normal, i.e. the expressions of $W_{n,0}$ and $W_{n,1} - W_{n,0}$, and these expression can be easily obtained from our generating function (11'):

$$W_{n,0} = \frac{1}{n!}\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)^n e^{-\alpha^2/2},\ \ W_{n,1} = \frac{1}{n!}\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{\alpha^2}{2}-n\right)^2 e^{-\alpha^2/2},$$

$$W_{n,1} - W_{n,0} = (n+1)\left(W_{n+1,0} - W_{n,0}\right) - n\left(W_{n,0} - W_{n-1,0}\right).$$

If α is large enough, then $W_{n,0}$, considered as a function of n, has a sharp maximum near that integer which is closest of $\alpha^2/2$. So, in order to calculate the sum:

$$\sum_{n=0}^{\infty} W_{n,0}\varphi(n)$$

where φ is not varying too fast, it is allowed the approximation in which we expand this function in the neighborhood of $n = \alpha^2/2$, as a power series, and we keep only the first term:

$$\sum_{n=0}^{\infty} W_{n,0}\varphi(n) \simeq \varphi\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty} W_{n,0} = \varphi\left(\frac{\alpha^2}{2}\right).$$

In the same way we get:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(W_{n,1} - W_{n,0}\right)\varphi(n) = \sum_{n=0}^{\infty} n\left(W_{n,0} - W_{n-1,0}\right)\left[\varphi(n-1) - \varphi(n)\right] \simeq$$

$$\simeq -\sum_{n=0}^{\infty} n\left(W_{n,0} - W_{n-1,0}\right)\varphi'(n) =$$

$$= \sum W_{n,0}\left[(n+1)\varphi'(n+1) - n\varphi'(n)\right] \simeq \left(\frac{dn\varphi'}{dn}\right)_{n=\frac{\alpha^2}{2}}.$$

Let us come back now to our problem. As the summand is symmetric in n and n', the borders $n + \frac{1}{2} = 0$ and $n' + \frac{1}{2} = 0$ give the same contribution:

$$\sum_{n,n'} W_{nn'}K = \int_{-1/2}^{\infty}\int_{-1/2}^{\infty} W_{nn'}K\,dn\,dn' +$$

$$+\frac{1}{12}\sum_{n=0}^{\infty} W_{n,0}\left(\frac{\partial K}{\partial n'}\right)_{n'=0} + \frac{1}{12}\sum_{n=0}^{\infty}\left(W_{n,1} - W_{n,0}\right)(K)_{n'=0}.$$

The integral has been calculated in the previous paragraph. Applying our calculation method, just previously used, to the summation upon n, we get for the corrective term the following expression:

$$\frac{1}{12}\left\{\left(\frac{\partial K}{\partial n'}\right)_{n=\frac{\alpha^2}{2},n'=0} + \left(\frac{\partial K}{\partial n}\right)_{n=\frac{\alpha^2}{2},n'=0} + \frac{\alpha^2}{2}\left(\frac{\partial^2 K}{\partial n^2}\right)_{n=\frac{\alpha^2}{2},n'=0}\right\}. \qquad (30)$$

Denoting by χ', χ'' the derivatives of the Fermi function χ with respect to the variable u and by $\overline{X}$, $\overline{X'}$ the values of X, X' respectively for $n = \frac{\alpha^2}{2}, n' = 0:$

$$\overline{X}=\frac{1}{kT}\left[\frac{\hbar^2}{8m}\frac{f^2}{f_x^2}\left(f+2\frac{mw}{\hbar}\right)^2-E_0\right]-\frac{\xi}{2}$$

$$\overline{X}'=\frac{1}{kT}\left[\frac{\hbar^2}{8m}\frac{f^2}{f_x^2}\left(f-2\frac{mw}{\hbar}\right)^2-E_0\right]+\frac{\xi}{2}$$

we obtain for the expression (30) the following result:

$$\frac{1}{12}\frac{\hbar\omega_0}{kT}\left\{\left(1+\frac{1}{2}\frac{f'^2}{f_z^2}\right)\left[\chi'\left(\overline{X}-\frac{\xi}{2}\right)-\chi'\left(\overline{X}+\frac{\xi}{2}\right)\right.\right.$$

$$+\chi'\left(\overline{X}'-\frac{\xi}{2}\right)-\chi'\left(\overline{X}'+\frac{\xi}{2}\right)+$$

$$+\frac{1}{8}\frac{\hbar^2}{mkT}\frac{f'^2f^2}{f_z^4}\left(f+2\frac{mw}{\hbar}\right)^2\left[\chi''\left(\overline{X}-\frac{\xi}{2}\right)-\chi''\left(\overline{X}+\frac{\xi}{2}\right)\right]$$

$$\left.\left.+\frac{1}{8}\frac{\hbar^2}{mkT}\frac{f'^2f^2}{f_z^4}\left(f-2\frac{mw}{\hbar}\right)^2\left[\chi''\left(\overline{X'}-\frac{\xi}{2}\right)-\chi''\left(\overline{X'}+\frac{\xi}{2}\right)\right]\right]\right\} \qquad (30')$$

In order to obtain the corrective term for the resistance, we have to multiply this expression by

$$\frac{f'^3}{f_z}N\left(N+1\right)$$

and then integrate upon f' and f_z from 0 to ∞. It is convenient however to introduce the integration variables f and $t=\frac{f^2}{f_z^2}$. We have then to multiply the expression with

$$\frac{1}{2}f^4N\left(N+1\right)\frac{t-1}{t^2}$$

and to integrate upon f from 0 to ∞ and upon t from 1 to ∞. We shall first evaluate the integral over t. The arguments of the derivatives of the Fermi function are linear in t. While integrating, we use the property of the negative derivative of the Fermi function, of having a sharp maximum when its argument has the value zero. This is why the other terms can be considered as slowly varying, and can be expanded in power series in the neighborhood of this point. The integration of therms containing the second derivative as a factor can be reduced to the first case, integrating by parts. The result of this calculation is:

$$\frac{\hbar\omega_0}{48}\left\{\frac{1}{\frac{\hbar^2}{8m}\left(f+2\frac{mw}{\hbar}\right)^2}\left(\frac{1}{t_2^2}-\frac{1}{t_1^2}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\frac{\hbar^2}{8m}\left(f-2\frac{mw}{\hbar}\right)^2}\left(\frac{1}{t_4^2}-\frac{1}{t_3^2}\right)\right\} \qquad (31)$$

where $t_1 ... t_4$ are the solutions of the four equations $\overline{X} - \frac{\xi}{2} = 0, ... \overline{X'} + \frac{\xi}{2} = 0$, so:

$$t_1 = \frac{E_0 + \hbar w f}{\frac{\hbar^2}{8m}\left(f + 2\frac{mw}{\hbar}\right)^2} = t_2\left(1 + \frac{\hbar w f}{E_0}\right),$$

$$t_2 = \frac{E_0}{\frac{\hbar^2}{8m}\left(f + 2\frac{mw}{\hbar}\right)^2},$$

$$t_3 = \frac{E_0}{\frac{\hbar^2}{8m}\left(f - 2\frac{mw}{\hbar}\right)^2},$$

$$t_1 = \frac{E_0 - \hbar w f}{\frac{\hbar^2}{8m}\left(f - 2\frac{mw}{\hbar}\right)^2} = t_3\left(1 - \frac{\hbar w f}{E_0}\right).$$

As the maximum value of $\hbar w f$ is $k\Theta$, the value of $\hbar w f / E_0$ is very small for all the values of f. Consequently, we can expand (31) in the powers of this quantity; we obtain:

$$\frac{\hbar \omega_0}{12} \hbar w f \frac{\frac{\hbar^2}{8m}\left(f^2 + 4\frac{m^2 w^2}{\hbar^2}\right)}{E_0^3}.$$

This expression must be multiplied by $f^4 N (N+1)$ and integrated upon f. We introduce again, as integration variable, the quantity $\xi = \hbar w f / kT$ and multiply by the factors preceding the summation in (24); so, we obtain the change of resistivity as:

$$\Delta\rho_t = \frac{D^2}{32\pi^3} \frac{m\omega_0^2}{12\delta\hbar^5 w^8 e^2 \nu^2} \frac{(kT)^5}{8E_0^3} \cdot$$

$$\cdot \left[(kT)^2 \int_0^{\Theta/T} \xi^7 \frac{e^\xi}{\left(e^\xi - 1\right)^2} d\xi + \left(2mw^2\right)^2 \int_0^{\Theta/T} \xi^5 \frac{e^\xi}{\left(e^\xi - 1\right)^2} d\xi\right]. \tag{32}$$

Dividing this expression by the value of the resistance in zero field, $H = 0$ (29) we get the relative change of this quantity:

$$\frac{\Delta\rho_t}{\rho} = \frac{1}{128} \frac{\hbar^7 \omega_0^2}{m w^2} \frac{1}{E_0^3} \left[\left(2mw^2\right)^2 + (kT)^2 \frac{I_7}{I_5}\right] \tag{33}$$

with

$$I_\mu = \int_0^{\Theta/T} \xi^\mu \frac{e^\xi}{\left(e^\xi - 1\right)^2} d\xi$$

8 The limit case of strong magnetic fields

The approximation discussed in the previous section is valid if the condition $\hbar\omega_0 \ll kT$ is fulfilled. Another case can be easily analyzed: when the magnetic field is so high, than all the electrons are situated on the state having the quantum number n equal to zero. We can check immediately that, in this case, our expression (24) of the resistance depends linearly on the magnetic field, as out of the sum over n and n' we must take into consideration only the first term, corresponding to $n = n' = 0$. The Fermi functions do not depend anymore on the magnetic field, so only the factor preceding the integral in (24) and

$$W_{0,0} = \exp\left(-\frac{\hbar}{2m\omega_0} f'^2\right)$$

are $H-$dependent. The factor is proportional to H, and $W_{0,0}$ can be expand as a power series; when the maximum value of the exponent is small compared to 1, i.e. the condition

$$\frac{(kT)^2}{2mw^2\hbar\omega_0} \ll 1 \tag{34}$$

is fulfilled, the series can be cut after the second term, and (24) gives the following expression for the resistance, in this limiting case:

$$\rho_t = \frac{D^2}{16\pi^3}\frac{m^2}{\delta\hbar w e^2\nu^2}\frac{1}{kT}\left\{\omega_0 \int df' df_z \frac{f'^3 f}{f_z} N(N+1)\overline{K} - \right.$$
$$\left. -\frac{\hbar}{2m}\int df' df_z \frac{f'^3 f}{f_z} N(N+1)\overline{K}\right\} \tag{35}$$

where $2\overline{K}$ is the limit value of K:

$$\overline{K} = \frac{1}{\left[\exp\left(\frac{1}{k\,T}\left(\frac{\hbar^2}{2m}f_z^2 + \frac{m\omega^2}{2f_z^2}\right) - \frac{\xi}{2}\right)\right] + 1} - \frac{1}{\left[\exp\left(\frac{1}{k\,T}\left(\frac{\hbar^2}{8m}f_z^2 + \frac{m\omega^2}{2f_z^2}\right) + \frac{\xi}{2}\right)\right] + 1}$$

In order to be able to discuss the formula (34), we have to evaluate the integral. Let us first remark that the arguments of the $K-$dependent Fermi functions can be put in the following form:

$$\frac{1}{k\,T}\left(\frac{\hbar^2}{8m}f_z^2 + \frac{m\omega^2}{2f_z^2}\right) - \frac{\xi}{2} = \frac{1}{k\,T}\frac{mw^2}{2}\left(\frac{f}{f_z} - \frac{\hbar}{2mw}f_z\right)^2$$

$$\frac{1}{k\,T}\left(\frac{\hbar^2}{2m}f_z^2 + \frac{m\omega^2}{f_z^2}\right) + \frac{\xi}{2} = \frac{1}{k\,T}\frac{mw^2}{2}\left(\frac{f}{f_z} + \frac{\hbar}{2mw}f_z\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{k\,T}\frac{mw^2}{2}\left(\frac{f}{f_z} - \frac{\hbar}{2mw}f_z\right)^2 + \xi,$$

so none of them can take negative values. But the Fermi function is significantly different from zero only for small positive values of the argument. As the second argument vanishes only for $f = 0$, consequently for $\xi = 0$, we can expand the corresponding function upon the power of the summand ξ of this argument and therefore we obtain for $\overline{K}$:

$$\overline{K} = -\xi \chi' \left[\frac{mw^2}{k\ T} \left(\frac{f}{f_z} - \frac{\hbar}{2mw} f_z \right)^2 \right].$$

We shall introduce again, as in the previous paragraph, f and $t = \left(\frac{f}{f_z}\right)^2$ as integration variables. For the first integral, we have to start with the calculation of:

$$-\frac{1}{2} \int_1^\infty \frac{t-1}{t^2} \chi' \left[\frac{mw^2}{2k\ T} t \left(1 - \frac{kT}{2mw^2} \frac{\xi}{t} \right)^2 \right] dt \tag{36}$$

The result of this calculation must be multiplied by

$$\left(\frac{kT}{\hbar w} \right)^5 \xi^5 N (N+1)$$

and integrated over ξ. For the next calculation we shall presume that $kT \gg mw^2$, which is not a significant restriction for the temperature, as mw^2/k is of the order 1°. Now, we can calculate the integral (36) as an integral over the derivative of the Fermi function, following the usual method: the integrand is expanded in the neighborhood of that point, where the derivative of the Fermi function vanishes, and then the series is integrated term by term; in fact, we can restrict ourselves to the first term. Introducing as integration variable the quantity:

$$u = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{kT}{2mw^2} \frac{1}{t} \right)$$

we obtain for (36) the approximate result:

$$\frac{1}{\sqrt{\xi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{(1 + \exp(u^2))(1 + \exp(-u^2))} = \frac{j}{\sqrt{\xi}} = \frac{0.708}{\sqrt{\xi}}$$

where the numerical value of the integral is $j = 0.708$. Integrating now over ξ in the first integral of the accolade in (35), we get:

$$j \left(\frac{kT}{\hbar w} \right)^5 \int_0^{\Theta/T} \xi^{9/2} N (N+1)\, d\xi$$

After a similar calculation, the second integral gives:

$$-\frac{1}{2} j \left(\frac{kT}{\hbar w} \right)^7 \int_0^{\Theta/T} \xi^{13/2} N (N+1)\, d\xi$$

Introducing these results in (35), we obtain for the resistance change (probabil omis din gresala Δ in textul original):

$$\rho_t = j\frac{D^2}{16\pi^3}\frac{m^2}{\delta\hbar w^2 e^2 \nu^2}\frac{1}{kT}\cdot$$

$$\cdot\left\{\omega_0\left(\frac{kT}{\hbar w}\right)^5 I_{9/2} - \frac{1}{2}\frac{\hbar}{m}\left(\frac{kT}{\hbar w}\right)^7 I_{13/2}\frac{kT}{mw^2}\right\}$$

and for the resistance relative change:

$$\frac{\Delta\rho_t}{\rho} = \frac{3}{2}j\left\{\frac{I_{9/2}}{I_5}\frac{\hbar\omega_0}{kT} - \frac{1}{2}\frac{kT}{mw^2}\frac{I_{13/2}}{I_5}\right\} - 1. \tag{37}$$

9 The effect in longitudinal fields

If the electric and magnetic fields are parallel, the calculation of resistivity is very similar to that done by Bloch in the absence of fields. The movement of the electron parallel to the two fields is accelerated. So, contrary to the situation encountered in the case of a transverse magnetic field, there are no stationary states in both fields, and the electric field must be considered as the cause of the temporal change of the distribution function. So, we have to calculate, in the usual way, that distribution function, which remains stationary under the influence of the electric field and of the lattice thermal motion.

We shall obtain this distribution function in the form $\chi_q + \psi_q$, with χ_q- the Fermi function, and ψ_q- a correction, chosen in such a way, as its first approximation is proportional to the intensity of the electric field F. While imposing the stationarity condition, we take into account only the terms linear in F, so the quadratic terms in F or the product $F\psi$ will be neglected. The whole temporal change of the distribution function, which should vanish in the stationary case, contains two terms. One term contains the influence of the electric field and is, as it is well known,

$$\frac{eF}{\hbar}\frac{\partial\left(\chi_q + \psi_q\right)}{\partial l}$$

According to the presumption just mentioned, it is in fact:

$$\frac{eF}{\hbar}\frac{\partial\chi_q}{\partial l},$$

where l is again the electron wave number, for the movement parallel to the magnetic field. The other term contains the change due to the lattice thermal motion. In order to calculate this term, we also need the transition probabilities. But these quantities can be obtained very easily, if in our formulas (8a,b) we put $F = 0$. As F enters only in the factors $\left(1-\cos\Omega t\right)/\Omega^2$, we must only put $\varepsilon_{q'} - \varepsilon_q$ for the energy differences entering in Ω. Then the change of the distribution function, due to collisions, becomes:

$$\left(\frac{d\chi_q}{dt}+\frac{d\psi_q}{dt}\right)_{\mathrm{col}}=\frac{D^2}{M\hbar w}\frac{\partial}{\partial t}\sum_{n'}\sum_{l',x_0'}\sum_{\vec{f}} f\cdot$$

$$\cdot W_{nn'}\left\{\left[\left(\chi_{q'}+\psi_{q'}\right)\left(1-\chi_q-\psi_q\right)N-\left(\chi_q+\psi_q\right)\left(1-\chi_{q'}-\psi_{q'}\right)(N+1)\right]\cdot\right.$$

$$\cdot\frac{1-\cos\left(\frac{\varepsilon_{q'}-\varepsilon_q}{\hbar}+\omega\right)t}{\left(\frac{\varepsilon_{q'}-\varepsilon_q}{\hbar}+\omega\right)^2}+\left[\left(\chi_{q'}+\psi_{q'}\right)\left(1-\chi_q-\psi_q\right)(N+1)-\right.$$

$$\left.\left.-\left(\chi_q+\psi_q\right)\left(1-\chi_{q'}-\psi_{q'}\right)N\right]\frac{1-\cos\left(\frac{\varepsilon_{q'}-\varepsilon_q}{\hbar}-\omega\right)t}{\left(\frac{\varepsilon_{q'}-\varepsilon_q}{\hbar}-\omega\right)^2}\right\}$$

$$\simeq\frac{D^2}{M\hbar w}\frac{\partial}{\partial t}\sum_{n'}\sum_{l'x_0'}\sum_{\vec{f}} fW_{nn'}\cdot \tag{38}$$

$$\cdot\left\{\left[\chi_{q'}\left(1-\chi_q\right)N-\chi_q\left(1-\chi_{q'}\right)(N+1)+\psi_{q'}\cdot\right.\right.$$

$$\cdot\left(\left(1-\chi_q\right)N-\chi_q(N+1)\right)-\psi_q\left(\chi_{q'}N-\left(1-\chi_{q'}\right)(N+1)\right)\right]+\left[\left(\chi_{q'}+\psi_{q'}\right)\left(1-\chi_q-\psi_q\right)(N+1)\right.$$

$$\cdot\frac{1-\cos\left(\frac{\varepsilon_{q'}-\varepsilon_q}{\hbar}+\omega\right)t}{\left(\frac{\varepsilon_{q'}-\varepsilon_q}{\hbar}+\omega\right)^2}+\left[\chi_{q'}\left(1-\chi_q\right)(N+1)-\chi_q\left(1-\chi_{q'}\right)N+\psi_{q'}\cdot\right]\cdot$$

$$\psi_{q'}\left(\left(1-\chi_q\right)(N+1)+\chi_q N\right)+\psi_q\left(\chi_{q'}(N+1)+\left(1-\chi_{q'}\right)N\right)\right]\cdot$$

$$\left.\cdot\frac{1-\cos\left(\frac{\varepsilon_{q'}-\varepsilon_q}{\hbar}-\omega\right)t}{\left(\frac{\varepsilon_{q'}-\varepsilon_q}{\hbar}-\omega\right)^2}\right\},$$

$$\psi_{q'}\left[\left(1-\chi_q\right)N+\chi_q(N+1)\right]-\psi_q\left[\chi_{q'}N-\left(1-\chi_{q'}\right)(N+1)\right]$$

if the terms containing the products $\psi_q,\ \psi_{q'}$ are neglected. This expression can be simplified, if we use the selection rules (10a), (10b), which remain valid in this case too. With these rules, we eliminate f_z and x_0' and then replace the summations over the remaining wave numbers by integrals. We finally get:

$$\left(\frac{d\chi_q}{dt}+\frac{d\psi_q}{dt}\right)_{\mathrm{col}}=\frac{D^2}{M\hbar w}\frac{\partial}{\partial t}\sum_{n'}\int\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 dl'df_x fW_{nn'}\Lambda \tag{39}$$

where Λ is an abbreviation for the accolade in (38).

It is worth noting that χ_q does not depend on the quantum number x_0. For ψ_q, we shall look for a solution having the same property. The only function of the r.h.s. of (39) which depends also on x_0 is $W_{nn'}$, but, as this dependence enters in fact through the combination $x_0' - x_0$, which has been already expressed in terms of f_y, its x_0 dependence disappears completely. Further on, the integrand in (39) contains f_x and f_y only in the combination $f_x^2 + f_y^2$, so the integral can be easily done in polar coordinates:

$$\left(\frac{d\chi_q}{dt} + \frac{d\psi_q}{dt}\right)_{\mathrm{col}} = \frac{L^2}{(2\pi)^3} \frac{D^2}{M\hbar w} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{n'} \int_{-\infty}^{+\infty} dl' \int_0^{\infty} df' f' f W_{nn'} \Lambda. \tag{40}$$

We shall use now, as usual, the energy conservation law, in order to eliminate f'. So, we shall split the integral appearing in (40) in two parts; one of them refers to the emission processes, the other one - to the absorption processes. Later on, we use the delta-function properties of oscillatory factors like $(1 - \cos \Omega t)/\Omega^2$, in order to integrate over f'; in this way, the zero-order terms in F disappear. After taking the derivative with respect to t, one obtains:

$$\left(\frac{d\chi_q}{dt} + \frac{d\psi_q}{dt}\right)_{\mathrm{col}} = \frac{1}{4\pi} \frac{D^2}{\delta\hbar w^2} \sum_{n'} \int dl' \left[\left(f^2 W_{nn'} \Gamma\right)_I + \left(f^2 W_{nn'} \Delta\right)_{II}\right],$$

where:

$$\Gamma = \psi_{q'} \left[(1 - \chi_q) N + \chi_q (N+1)\right] - \psi_q \left[\chi_{q'} N + (1 - \chi_{q'})(N+1)\right]$$

$$\tag{41}$$

$$\Delta = \psi_{q'} \left[(1 - \chi_q)(N+1) + \chi_q N\right] - \psi_q \left[\chi_{q'} (N+1) + (1 - \chi_{q'}) N\right]$$

and the indices I, respectively II means that for f' and f_z must be introduced in those parentheses the solutions of the equations:

$$\varepsilon_{q'} - \varepsilon_q + \hbar\omega = 0, \quad l' - l + f_z = 0$$

respectively:

$$\varepsilon_{q'} - \varepsilon_q - \hbar\omega = 0, \quad l' - l - f_z = 0$$

Now, we can write the stationarity condition:

$$-\frac{eF}{kT} \frac{\hbar}{m} \chi_q (1 - \chi_q) l + \frac{1}{4\pi} \frac{D^2}{\delta\hbar w^2}. \tag{42}$$

$$\cdot \sum_{n'} \int dl' \left[\left(f^2 W_{nn'} \Gamma \right)_I + \left(f^2 W_{nn'} \Delta \right)_{II} \right] = 0$$

We can presume that the perturbed stationary distribution function can be generated from the unperturbed one, through a small translation upon l:

$$\chi(n,l) + \psi(n,l) = \chi\left(n, l - \bar{l}\right), \tag{43}$$

consequently:

$$\psi_q = \chi\left(n, l - \bar{l}\right) - \chi(n,l) \simeq \frac{\hbar^2}{mkT} l\bar{l} \chi_q \left(1 - \chi_q\right).$$

This is why it is appropriate to propose the following form for ψ_q :

$$\psi_q = \frac{\hbar^2}{mkT} l \chi_q \left(1 - \chi_q\right) C_q,$$

where the coefficients C_q are some functions of the quantum numbers. For C_q, we obtain the following integral-differential equation:

$$-eF\chi_q \left(1 - \chi_q\right) l + \frac{1}{4\pi} \frac{D^2}{\delta w^2} \sum_{n'} \int dl' \left\{ \left[f^2 W_{nn'} N \chi_{q'} \left(1 - \chi_q\right) \right]_I + \right.$$

$$\left. + \left[f^2 W_{nn'} N \chi_q \left(1 - \chi_{q'}\right) \right]_{II} \left(l' C_{q'} - l C_q\right) = 0 \right\}. \tag{44}$$

For low temperatures ($T \ll \Theta$) we can use, in order to solve this equation, the method proposed by Bloch [10] for the case in which the fields are absent, and conclude that, in a first approximation, $C = const$ satisfies the equation (44). The main condition for the applicability of Bloch's approach, namely that $l' - l = \pm f_z$ to be small for low temperatures, is fulfilled in our case too. But, for high temperatures, our equation is much more difficult to solve than Bloch's one, as the dependence of n and n' is very unclear. This is why here we shall restrict ourselves to the case of low temperatures.

The value of the constant, which we shall denote again $\bar{l}$, can be easily obtained from eq. (44): we multiply the equation by l, we sum up upon n from 0 to ∞, and we integrate upon l from $-\infty$ to $+\infty$. The result is:

$$-eF \sum_n \int dl\ l^2 \chi_q \left(1 - \chi_q\right) + \frac{1}{4\pi} \frac{D^2}{\delta w^2} \bar{l} \cdot$$

$$\cdot \sum_n \sum_{n'} \int dl dl' \left(\frac{l + l'}{2} + \frac{l - l'}{2} \right) \left(l' - l\right) \cdot$$

$$\cdot \left\{ \left[f^2 W_{nn'} \chi_{q'} \left(1 - \chi_q\right) N \right]_I + \left[f^2 W_{nn'} \chi_q \left(1 - \chi_{q'}\right) N \right]_{II} \right\} = 0.$$

As the expression between accolades under the integral of the second term is symmetric in the variables with and without the "prime" symbol, the result of the summation and of the integration of the summand with the antisymmetric factor $(l'+l)(l'-l)/2$ is zero, so the previous equation takes the form:

$$-eF\sum_n \int_{-\infty}^{\infty} dl\ l^2 \chi_q (1-\chi_q) = \tag{45}$$

$$= \frac{1}{8\pi}\frac{D^2}{\delta w^2}\bar{l}\sum_n \sum_{n'} \int dl dl' (l'-l)^2 \cdot$$

$$\cdot \left\{ \left[f^2 W_{nn'} \chi_{q'} (1-\chi_q) N\right]_I + \left[f^2 W_{nn'} \chi_{q'} (1-\chi_{q'}) N\right]_{II} \right\}$$

The l.h.s. can be put in a simpler form after an integration by parts:

$$eF\sum_n \int dl\ l^2 \chi_q (1-\chi_q) =$$

$$= \frac{mkT}{\hbar} eF \sum_n \int \chi_q dl = 4\pi^2 \frac{kT}{\hbar\omega_0} eF\nu.$$

At the last transformation of the previous calculation we used the formula which express the number of states $Z_n dl$ with a certain quantum number n and with the quantum number l in an interval of length dl [7]:

$$Z_n dl = \frac{1}{4\pi^2}\frac{m\omega_0}{\hbar} L^3 dl.$$

But $\bar{l}$ is, as we can immediately see from (43), the average wave number on the direction of the two fields. For the current density, one easily obtains:

$$s_z = -e\nu \frac{\hbar \bar{l}}{m}$$

and for the resistance:

$$\rho_l = \frac{F}{s_z} = -\frac{mF}{e\omega\hbar\bar{l}}.$$

With the value of $\bar{l}$ obtained from eq. (45), one obtains:

$$\rho_l = \frac{D^2}{32\pi^3}\frac{m\omega_0}{\delta w^2 e^2 \nu^2}\frac{1}{kT}\sum_{n,n'} \int dl dl' (l'-l)^2 \cdot$$

$$\cdot \left\{ \left[f^2 W_{nn'} N \chi_{q'} (1-\chi_q)\right]_I + \left[f^2 W_{nn'} \chi_q (1-\chi_{q'}) N\right]_{II} \right\}.$$

Introducing now f_z and f' as integration variables instead of l and l', and using the identities:

$$\left[\chi_{q'} (1-\chi_q)\right]_I = \left[(N+1)(\chi_{q'}-\chi_q)\right]_I,$$

$$\left[\chi_q (1-\chi_{q'})\right]_{II} = \left[(N+1)(\chi_q-\chi_{q'})\right]_{II},$$

we obtain for the resistivity the formula:

$$\rho_l = \frac{D^2}{16\pi^3} \frac{m^2\omega_0}{\delta\hbar w e^2 \varpi^2} \frac{1}{kT} \sum_{n,n'} \int df' df_z f' f_z f W_{nn'} N (N+1) \cdot \tag{46}$$

$$\cdot \left[\frac{1}{\exp\left(X - \frac{\xi}{2}\right) + 1} - \frac{1}{\exp\left(X + \frac{\xi}{2}\right) + 1} + \frac{1}{\exp\left(X' - \frac{\xi}{2}\right) + 1} - \frac{1}{\exp\left(X' + \frac{\xi}{2}\right) + 1} \right],$$

where $X,\ X$ has the meaning resulting from (20). The integration must be done over the positive values of f' and $f_z$only.

We shall transform the r.h.s. of the expression (46) with exactly the same methods used for the resistance in transversal field, eq. (24).

The integration over n and n' using the expressions (12) for $W_{nn'}$ gives, evidently, the same result as in the case of a transverse field. This fact can be easily proved through a direct calculation. The only difference shows up at the azimuthal integration in the f', f_z plane; here, we have the integral:

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \sin\theta d\theta$$

instead of

$$\int_0^{\pi/2} \sin^3\theta d\theta,$$

which compensate exactly the difference between the numerical factors in (46) and (24).

In order to calculate the correction for small magnetic fields, we can take directly our result (30'). However, now we have to multiply this expression by $1/\left(2t^2\right)$ and integrate over t from 0 to ∞. After a calculation very similar to that already done for transversal field, we obtain:

$$\Delta\rho_l = \frac{D^2}{16\pi^3} \frac{m^2\omega_0^2}{\delta\hbar^5 w^6 e^2 \nu^2} \frac{1}{24E_0^2} (kT)^5 I_5$$

and

$$\frac{\Delta\rho_l}{\rho} = \frac{1}{16} \frac{\hbar^2\omega_0^2}{E_0^2}. \tag{47}$$

In the limit of strong magnetic fields, we can also use the same approach, familiar from the preceding section. The result is:

$$\frac{\Delta\rho_l}{\rho} = 12j \frac{mw^2}{kT} \left\{ \frac{I_{9/2}}{I_5} \cdot \frac{\hbar\omega_0}{kT} - \frac{1}{2} \frac{kT}{mw^2} \cdot \frac{I_{13/2}}{I_5} \right\} - 1. \tag{1}$$

10 Discussion of the results

Our results are expressed by the formulas:

$$\rho_t = \frac{D^2}{24\pi^3}\frac{m^2}{\delta\hbar^7 w^6}\frac{1}{e^2\nu^2}(kT)^5\int_0^{\Theta/T}\xi^5\frac{e^\xi}{(e^\xi-1)^2}d\xi, \quad if \quad \hbar\omega_0 \to 0 \qquad (*29)$$

$$\frac{\Delta\rho_t}{\rho} = \frac{1}{128}\frac{\hbar^7\omega_0^2}{mw^2}\frac{1}{E_0^3}\left[\left(2mw^2\right)^2 + (kT)^2\frac{I_7}{I_5}\right], \quad if \quad \hbar\omega_0 \ll kT \qquad (*33)$$

$$\frac{\Delta\rho_t}{\rho} = 1.062\left\{\frac{I_{9/2}}{I_5}\frac{\hbar\omega_0}{kT} - \frac{1}{2}\frac{kT}{mw^2}\frac{I_{13/2}}{I_5}\right\} - 1, \quad if \quad \hbar\omega_0 \gtrapprox E_0 \qquad (*37)$$

$$\frac{\Delta\rho_l}{\rho} = \frac{1}{16}\frac{\hbar^2\omega_0^2}{E_0^2}, \quad if \quad \hbar\omega_0 \ll kT \qquad (*47)$$

$$\frac{\Delta\rho_l}{\rho} = 4.24\frac{mw^2}{kT}\left\{\frac{I_{9/2}}{I_5}\cdot\frac{\hbar\omega_0}{kT} - \frac{1}{2}\frac{kT}{mw^2}\cdot\frac{I_{13/2}}{I_5}\right\} - 1, \quad if \quad \hbar\omega_0 \gtrapprox E_0 \qquad (*48)$$

In the limit considered in (29), the resistance must be identical with that obtained if we would solve the problem for $H = 0$, using Bloch's method. However, our result is more complete than that of Bloch, as our formula (24) is valid for $T \sim \Theta$ too, so (29) can be considered as valid in this temperature range too. Gruneisen [11] has shown that the formula (24) explains well the experimental results in the range $T \sim \Theta$ too.

For small magnetic fields, our calculations give, both in the transversal and longitudinal case, to a quadratic dependence of the resistance change, of the magnetic field. However, it is difficult to compare the theoretical results with the experimental ones, as the coefficient of the quadratic term, given by experiment, is strongly dependant on the purity and processing of the sample; each perturbation contribute with an extra change in resistance which, for symmetry reasons, is also dependant of the square of the magnetic field, and these various effect cannot be separated.

For very intense magnetic fields, our calculations show that, both in the transversal an longitudinal case, the change of resistance depends linearly on the magnetic field. The slope of the line, describing this dependence, in a plot where $\Delta\rho/\rho$ is represented as a function of H, is, according to Kapitsa, practically independent of the material purity and processing. According to our formula (37), the slope depends on the effective electron mass. So, the effective mass can be obtained through a comparison with the experimental results. The following table gives the ratio m/μ for several metals:

$Metal$	Cu	Ag	Mg	Cd	Al	As	Sb	Bi
m/μ	0.7	1.0	0.1	0.4	0.5	$1.1 \cdot 10^{-2}$	$8.3 \cdot 10^{-3}$	$3.3 \cdot 10^{-4}$

For the metals of the first three columns of the periodic system, one obtain, as we can see, normal values. For bismuth, however, one obtains a very small value for the effective mass, as a consequence of the strong field dependence of the resistance change. A similar result has been obtained by Peierls [12], by comparing his theory of diamagnetism at low temperatures and in strong magnetic fields, with the measurements of de Haas and van Alphen; he obtained for the effective magneton of the orbital movement of Bismuth electrons a value of $0.5 \cdot 10^{-18}$, giving the value $m/\mu = 1.8 \cdot 10^{-3}$; so, the agreement with the value obtained from our calculation is only qualitative.

We cannot say much about the temperature dependence of the slope, as no systematic investigations of this issue have been done. Kapitsa reported measurement for three temperatures only, which are too far away from the characteristic temperature, so temperatures for which our formula does not give a simple temperature dependence. It seems, however, that the theoretical slope increases when temperature decreases, slower than the experimental one.

The comparison between the theoretical predictions and the experimental results for the other parameter of the linear law - giving the intersection of the aforementioned line with the abscise axis - is more difficult than for the slope, as this parameter, according to Kapitsa it depends strongly on the material processing and purity. According to our calculation, the validity range of the linear law starts for intensities of the magnetic fields which are high enough, to have all the electrons in states with quantum number $n = 0$. The lower value of the field satisfying this condition is given by:

$$\frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{2m\omega_0}{\hbar}\right)^{3/2} = \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{2eH}{\hbar c}\right)^{3/2} = \nu.$$

Instead of comparing the intersection of the line with the H axis, it is convenient to compare this critical field, in order to find the density number of electrons (per cubic centimeter), ν. With usual presumptions concerning the electron density, one obtains for the critical intensity of the magnetic field a value of the order 10^8 Gauss. The experiment shows that the linear law is valid, for many metals, already for fields of about 10^5 Gauss. In such cases we must consequently presume that the value of ν is much smaller than if we presume that the number of electrons equals the number of atoms per cubic centimeter. For alkali metals, we are not forced to make such a presumption, as, according to Kapitsa's measurements, it is not clear that the linear law is valid, even for highest values of the magnetic field.

Contrarily, for metals like Cadmium and Bismuth, the linear law is already valid for fields of about $3 \cdot 10^4$ Gauss; we have to conclude that, in such cases, ν is much smaller as generally considered. For Bismuth, the same conclusion has been also reached from other approaches: Peierls [12] obtains, from diamagnetic properties, the value $\nu = 2{\cdot}10^{16}$; Bellia [13], from the Hall constant, $\nu = 1.2{\cdot}10^{19}$; and, recently, Eucken and Forster [14] obtain, from researches on electron free path in Bismuth, values of ν in the range $1.63 \cdot 10^{17}$ and $10.9 \cdot 10^{17}$. Our formula (49) gives a value of $\nu \simeq 5 \cdot 10^{17}$. The agreement of results obtained through various approaches is clearly far from being exact, but we can however conclude that the number of conduction electrons in Bismuth is significantly smaller that the number of atoms.

Finally, I want to express my thanks to Professor Heisenberg for suggesting me the theme of this work and for the continuous support given during its elaboration, as well as to Mr. Dr. Bloch, for numberless of interesting discussions on the problems under study.

Curriculum vitae

I, Serban Titeica, was born on March 27, 1908, in Bucharest, as son of Professor George Titeica. I followed the high school "Mihai Viteazul" in Bucharest, and I graduated the bachelor exam in 1926. From the autumn of 1926 to the summer of 1929, I have studied mathematics, physics and chemistry at the University of Bucharest. After a break of one year, when I served for my compulsory military service, I started to study physics, mathematics and geophysics at the University in Leipzig. Here I followed the courses and seminaries of the following professors and lecturers: Heisenberg, Hund, v. d. Warden, Weickmann, Bloch, Haurwitz.

To all these gentlemen I owe many thanks.

References

[1] A. Sommerfeld, Ztschr. f. Phys. **48**. S1. 1928.

[2] P. Kapitsa, Proc. Roy. Soc. (A) 123. S. 292. 1928

[3] N. H. Frank, Ztschr. f. Phys. **64**. S650. 1930.

[4] F. Bloch, Ztschr. f. Phys. **53**. S216. 1929.

[5] R. Peierls, Ann. d. Phys [5] **10**. S. 37. 1931.

[6] F. Bloch, Ztschr. f. Phys. **52**. S555. 1928.

[7] L. Landau, Ztschr. f. Phys. **64**. S629. 1930.

[8] E. Teller, Ztschr. f. Phys. **67**. S311. 1931.

[9] R. Peierls, Ztschr. f. Phys. **80**. S763. 1933.

[10] F. Bloch, Ztschr. f. Phys. **57**. S545. 1929 (?)

[11] E. Grüneisen, Leipziger Vorträge 1930.

[12] R. Peierls, Ztschr. f. Phys. **81**. S192. 1933.

[13] O. Bellia, Ztschr. f. Phys. **74**. S655. 1932.

[14] A. Eucken, F. Förster, Gött. Nachr. Bd. 1. Nr. 3. S. 43. 1934.

The transverse magnetoresistance in high magnetic fields as a hopping conduction problem

Alexandru Aldea and Ladislau Bányai

In most solid state transport problems one considers that the charge carriers are (quasi-) free electrons weakly scattered by phonons or random potentials. This picture covers successfully the description of conduction process presented in standard textbooks. However, in the last two decades, there is an increasing interest towards the properties of very low mobility materials, where other approaches are needed. The new picture that emerged considers besides the mobile, weakly scattered electrons, also electrons of low mobility, that are localized and only due to some small perturbation (as for example a phonon absorption or emission) may jump from site to site. This idea was forwarded by Kasuya and Koide [1] in 1958 in the frame of the impurity conduction problem in semiconductors and later developed by many other contributors. It was only recently recognized [2], [3] that actually the ideas of this hopping conduction mechanism were contained in an early paper by Ţiţeica [4], in 1935, in a seemingly different field.

Ţiţeica was the first who attacked the quantum mechanical theory of magnetoresistance and described the transverse effect as due to the hopping of the center of the cyclotronic motion. Ţiţeica's formula served Davydov and Pomeranchuk [5] to interpret the Shubnikov - de Haas oscillations in bismuth and is still today the basic formula in the field, although many extensions, to more complicated cases than that considered in the original paper, had been performed. In the formal and conceptual improvement of the theory one should mention the works of Kubo, Hasegawa, Hashitsume [6] and Adams, Holstein [7].

The aim of this paper is to give a modern presentation of Ţiţeica's theory of transverse magnetoresistivity with some emphasis on its hopping transport aspects. Actually, some aspects of the transverse magnetoresistance problem are better understood today due to the progress realized in the understanding of the general hopping problem.

The classical Boltzmann theory of electric conduction of weakly scattered free electrons relies on the kinetic equation with electric and magnetic fields:

$$\frac{\partial \overline{n}_{\vec{k}}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{n}_{\vec{k}}}{\partial \vec{k}} \left(\vec{E} + \frac{\hbar}{mc} \vec{k} \times \vec{H} \right) = \tag{1}$$
$$= - \sum_{\vec{k}'} \left[W_{\vec{k}\vec{k}'} \overline{n}_{\vec{k}} \left(1 - \overline{n}_{\vec{k}'}\right) - W_{\vec{k}'\vec{k}} \overline{n}_{\vec{k}'} \left(1 - \overline{n}_{\vec{k}}\right) \right]$$

for the average occupation number $\overline{n}_{\overrightarrow{k}}$ of a state of wave vector $\overrightarrow{k}$. (The use of the wave vector $\overrightarrow{k}$ instead of the velocity $\overrightarrow{v} = \hbar \overrightarrow{k}/m$ is convenient for the connection with the quantum mechanical treatment.) The transition rates satisfy the detailed balance rule:

$$W_{\overrightarrow{k}\overrightarrow{k}'} = W_{\overrightarrow{k}'\overrightarrow{k}} \exp\left(\frac{\varepsilon_{\overrightarrow{k}} - \varepsilon_{\overrightarrow{k}'}}{kT}\right) \tag{2}$$

where $\varepsilon_k = \hbar^2 k^2/2m$ is the (kinetic) energy of the free electron. The collisions giving rise to the transition rates $W_{\overrightarrow{k}\overrightarrow{k}'}$ are due to some scatterers we shall not specify.

In the absence of the external fields eq. (1) can be justified (although not completely rigorously) on quantum mechanical grounds, in the thermodynamic limit, for large times and small coupling to the scatterers. Then the transition rates are given by the Golden Rule of quantum mechanics.

In what concerns the external fields, their introduction in the above mentioned way can be justified only if they are weak. Since here we are interested only in effects that are linear in the electric field (Ohm's law), this limitation is important only with regard to the magnetic field. One will call these fields for which eq. (1) is valid - classical fields.

Another complication occurs due to the fact that, actually, the electrons themselves are sources of the fields and therefore the fields should be regarded as self consistent. However, as it is written down, eq. (1) describes only situations of flow that are homogenous in space and, therefore, due to the supposed fixed position positive compensating charge, the electric field coincides with the external one, and if the average velocity of the electrons is not too big, the magnetic field also can be identified with the external magnetic field.

One is interested in the stationary solutions of eq. (1) with d.c. fields, for which one computes the average electric current density

$$\overrightarrow{j} = \frac{e}{\Omega} \sum_{\overrightarrow{k}} \overline{n}_{\overrightarrow{k}} \frac{\hbar \overrightarrow{k}}{m} \tag{3}$$

(Here Ω is the volume of the periodic box to which we restricted the system. Of course, at the end the limit $\Omega \to \infty$ should be performed with the rule $\sum_{\overrightarrow{k}} \to \frac{\Omega}{(2\pi)^3} \int d\overrightarrow{k}$.)

If the scattering is elastic, than there is a relaxation time:

$$\tau\left(\varepsilon_{\overrightarrow{k}}\right) = \left[\sum_{\overrightarrow{k}'} \left[W_{\overrightarrow{k}\overrightarrow{k}'}\left(1 - \frac{k'_x}{k_x}\right)\right]\right]^{-1} \tag{4}$$

through which one can express the solution of eq. (1). Then, choosing the magnetic field along the Oz axis, one finds for the components of the conductivity tensor:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{ne^2}{m} \left\langle \frac{\tau}{1+\omega_0^2\tau^2} \right\rangle \tag{5}$$

$$\sigma_{xy} = -\sigma_{yx} = \frac{ne^2}{m} \left\langle \frac{\omega_0^2\tau^2}{1+\omega_0^2\tau^2} \right\rangle \tag{6}$$

$$\sigma_{zz} = \frac{ne^2}{m} \langle \tau \rangle \tag{7}$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = \sigma_{zy} = 0 \tag{8}$$

where $\omega_0 = \frac{eH}{mc}$ is the cyclotronic frequency,

$$n = \frac{1}{\Omega} \sum_{\vec{k}} \overline{n}_{\vec{k}}$$

is the average density of electrons and the notation

$$\left\langle F\left(\varepsilon_{\vec{k}}\right)\right\rangle \equiv \frac{\int d\vec{k}\, \frac{\partial f\left(\varepsilon_{\vec{k}}\right)}{\partial \varepsilon_{\vec{k}}} \varepsilon_{\vec{k}} F\left(\varepsilon_{\vec{k}}\right)}{\int d\vec{k}\, \frac{\partial f\left(\varepsilon_{\vec{k}}\right)}{\partial \varepsilon_{\vec{k}}} \varepsilon_{\vec{k}}}$$

has been introduced (f being the Fermi function).

For strong (classical) magnetic fields, keeping only the leading terms in the expansion in powers of $\frac{1}{\tau\omega_0}$,one obtains:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} \simeq \frac{ne^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2} \left\langle \frac{1}{\tau} \right\rangle \tag{9}$$

$$\sigma_{xy} = -\sigma_{yx} \simeq \frac{ne^2}{m} \frac{1}{\omega_0} \tag{10}$$

Although eqs. (5) - (10) were obtained only for elastic scatterings, some of the results may be shown to hold also for inelastic scattering. Namely, eqs. (8) and (10) and the independence of σ_{zz} on magnetic field are generally valid. On the other hand, the high field limit of the transverse conductivity is modified to

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} \simeq \frac{1}{\omega_0^2} \frac{(2\pi)^6 \hbar^2 e^2}{2m^2 kT} \int d\vec{k} \int d\vec{k'} W_{\vec{k}\,\vec{k}'} f\left(\varepsilon_{\vec{k}}\right) \left(1 - f\left(\varepsilon_{\vec{k'}}\right)\right) (k_x - k'_x)^2 \tag{11}$$

One may observe from eqs. (5)-(11) that there is a fundamental difference between the transverse and longitudinal conductivities. If the relaxation time becomes infinite (no scattering) one gets $\sigma_{zz} \to \infty$ while $\sigma_{xx} \to 0$ and $\sigma_{xy} \to$

$$\sigma_{xy} \to \frac{ne^2}{m} \frac{1}{\omega_0}.$$

The explanation resides in the character of the classical motion of a free charge in crossed electric and magnetic fields, which is oscillatory in the direction of the electric field and uniform in the direction perpendicular to both fields.

The longitudinal and transverse resistivity are defined by:

$$\rho_{\parallel} = \frac{1}{\sigma_{zz}} \tag{12}$$

$$\rho_{\perp} = \frac{\sigma_{zz}}{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yx}^2}$$

One may see that, if there is a constant relaxation time, then these resistivities are equal and independent of ω_0. Another peculiarity resulting from eqs. (10) and (11) is that

$$\lim_{\omega_0 \to \infty} \rho_{\perp} = \frac{m^2}{2e^2\hbar^2 kT} \frac{\int d\overrightarrow{k} \int d\overrightarrow{k'} W_{\overrightarrow{k}\overrightarrow{k'}} f\left(\varepsilon_{\overrightarrow{k}}\right)\left(1 - f\left(\varepsilon_{\overrightarrow{k'}}\right)\right)\left(k_x - k'_x\right)^2}{\left(\int d\overrightarrow{k} \frac{\partial f\left(\varepsilon_{\overrightarrow{k}}\right)}{\partial \varepsilon_{\overrightarrow{k}}} k_x^2\right)^2}$$

a formula which incidentally coincides with the Bloch approximation for the resistivity in the absence of the magnetic field. Therefore one should not expect strong magnetoresistive effects, when the Bloch approximation gives reasonable results for $\omega_0 = 0$.

Now it is important to see exactly, how strong the magnetic field may [must] be in order to keep the validity of the description of the conduction problem through eq. (1). In the absence of an electric field one may observe that the stationary (equilibrum) solution of eq. (1) is the Fermi function of free electrons. Therefore the equilibrum itself has no knowledge of the magnetic field. This is correct for the classical electron, but quantum mechanics tells different.

According to quantum mechanics, the stationary states (Landau states) of an electron in a constant magnetic field (oriented along the Oz axis) are given (in the gauge $A = (0, Hx, 0)$) by:

$$\psi_{n,X,k_z}\left(\overrightarrow{r}\right) = \varphi_n\left(x - X\right) \frac{\exp\left(i\left(k_y y + k_z z\right)\right)}{\sqrt{L_y L_z}} \tag{13}$$

where the center X of the oscillator functions φ_n is

$$X \equiv -\frac{\hbar k_y}{m\omega_0} \tag{14}$$

The energy of such a stationary state

$$\varepsilon_{n,X,k_z} = h\omega_0 \left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}$$

depends only on the quantum numbers k_z and n.

Therefore, the motion along the magnetic field is still a free motion, while in the transverse plane is a relatively complicated one.

One expects that for $\hbar\omega_0 \ll kT$, the thermal fluctuations will smear out the quasi-discrete character of the spectrum and one may ignore the quantum mechanical description. But for $\hbar\omega_0 > kT$, one must take into consideration the quantization effects.

In the absence of an electric field, one would consider then the rate equation for the average occupation number $\overline{n}_\nu$ of the Landau states $\nu \equiv (n, X, k_z)$:

$$\frac{\partial \overline{n}_\nu}{\partial t} = -\sum_{\nu'} \left[W_{\nu\nu'} \overline{n}_\nu \left(1 - \overline{n}_{\nu'}\right) - W_{\nu'\nu} \overline{n}_{\nu'} \left(1 - \overline{n}_\nu\right) \right]$$

which is at least as well justified as the corresponding rate equation in the absence of the magnetic field. The heart of the problem is the introduction of the electric field, which is entirely different in the two cases, of longitudinal and transversal electric field.

In the case of a longitudinal electric field $E_\parallel$, Ţiţeica [4] took into account the fact that the motion along the magnetic field is still free and introduced the electric drift term analogously to the classical case:

$$\frac{\partial \overline{n}_\nu}{\partial t} + \frac{\partial \overline{n}_\nu}{\partial k_z} \frac{e}{\hbar} E = -\sum_{\nu'} \left[W_{\nu\nu'} \overline{n}_\nu \left(1 - \overline{n}_{\nu'}\right) - W_{\nu'\nu} \overline{n}_{\nu'} \left(1 - \overline{n}_\nu\right) \right] \tag{15}$$

Again, the form of the drift term may be justified for weak $E_\parallel$ (in the linear approximation) on the basis of the quantum mechanical Liouville equation.

The expression of the average longitudinal current density also is analogous to eq. (3):

$$j_z = \frac{e}{\Omega} \sum_\nu \overline{n}_\nu \frac{hk_z}{m}$$

Equation (15) resembles eq. (1) but it has no relaxation-time type solution for the elastic scattering and special approximation methods should be devised for its solution. Ţiţeica applied Bloch's approximation method to solve this equation for scattering on acoustical phonons and computed the respective magnetoresistive effect for classical ($\hbar\omega_0 \ll kT$) and for $(\hbar\omega_0 \gg \varepsilon_F, kT)$. He found for the classical fields a coincidence with the Bloch approximation of the classical problem. No such connection with the classical description has yet been proved for the exact solution in the case of an arbitrary scattering process.

The most difficult and most interesting problem, we shall insist on, is that of a transverse electric field $E_\perp$. Since in the transverse plane (to the magnetic field) the motion is not free, the transverse electric field cannot be introduced in the above described way. One should not be confused by the plane wave character of the wave function eq. (13) at least in the Oy direction, because it is essential that the energy does not depend on k_y.If one would ignore this and would write down an equation like eq. (18) in the Oy direction, as one may convince himself,it would not have solutions that behave linearly with respect to $E_\perp$ for small fields. Therefore, a new mode of formulating the electric field problem is necessary.

The first step, performed by Ţiţeica [4], was to find the stationary solutions of the Schroedinger equation in crossed magnetic and electric fields $\left(\overrightarrow{H} = (0,0,H)\,;\ \overrightarrow{E} = (E_\perp, 0, 0)\right)$. He has found that they are just the ordinary Landau functions eq. (13), with a shifted coordinate of the center of cyclotronic motion:

$$\widetilde{X} \equiv -\frac{\hbar k_y}{m\omega_0} - \frac{eE_\perp}{m\omega_0}$$

and a shifted energy

$$\widetilde{\varepsilon}_{n,\widetilde{X},k_z} = \hbar\omega_0\left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} + eE_\perp \widetilde{X} \tag{16}$$

Than he wrote down the rate equation

$$\frac{\partial \overline{n}_{\widetilde{\nu}}}{\partial t} = -\sum_{\widetilde{\nu}'}\left[W_{\widetilde{\nu}\widetilde{\nu}'}\overline{n}_{\widetilde{\nu}}\left(1-\overline{n}_{\widetilde{\nu}'}\right) - W_{\widetilde{\nu}'\widetilde{\nu}}\overline{n}_{\widetilde{\nu}'}\left(1-\overline{n}_{\widetilde{\nu}}\right)\right] \tag{17}$$

for the average occupation number of these states ($\widetilde{\nu} \equiv (n, X, k_z)$).

The exact steady state solution of eq. (17),due to the detailed balance property

$$W_{\widetilde{\nu}\widetilde{\nu}'} = W_{\widetilde{\nu}'\widetilde{\nu}} \exp\left(\frac{\varepsilon_{\widetilde{\nu}} - \varepsilon_{\widetilde{\nu}'}}{kT}\right) \tag{18}$$

is the Fermi function $f\left(\varepsilon_{\widetilde{\nu}}\right)$ i.e. thermal equilibrium in the presence of the electric field $E_\perp$. The problem then arises, how to use this equation to describe the required steady flow state and how to compute the current flow. These problems are closely related.

Looking at eq. (16) one may observe that the shift of the energy due to the electric field looks like the potential energy in the constant electric field $E_\perp$ (along the Ox direction) of an electron put in the center of the cyclotronic orbit. This is actually related to the fact that the wave function in the OX direction is localized around $\widetilde{X}$. Therefore, along this direction we are more closely to a coordinate description than to a velocity description (that would correspond to plane waves). Ţiţeica's idea was to assimilate the whole charge transport problem in strong magnetic films, along the OX axis as given only by the migration of the center of the cyclotronic orbit. This seems to be a reasonable approximation for strong enough magnetic fields, for which, roughly speaking, the period of cyclotronic motion is smaller than the collision time $(\omega_0\tau \gg 1)$, or what amounts to the same, the radius of the cyclotronic orbit is smaller than the collision distance. In this case, the coordinate of the electron coincides "effectively" with the coordinate of the cyclotronic motion.

With this assumption, one writes down the average electron charge density (supposed to depend only on x) as

$$\rho(x) = e \sum_{\nu} \overline{n}_{\nu} \delta(x - X) \tag{19}$$

and the average flow of the electric charge through a plane transversal to the OX direction, having the coordinate x, as:

$$j_x(x) = e \sum_{\widetilde{\nu}, \widetilde{\nu}'} \theta\left(x - \widetilde{X}\right) \theta\left(\widetilde{X}' - x\right) \left[W_{\widetilde{\nu}\widetilde{\nu}'} \overline{n}_{\widetilde{\nu}} \left(1 - \overline{n}_{\widetilde{\nu}'}\right) - W_{\widetilde{\nu}'\widetilde{\nu}} \overline{n}_{\widetilde{\nu}'} \left(1 - \overline{n}_{\widetilde{\nu}}\right)\right] \tag{20}$$

Now the problem becomes a typical hopping transport problem in one dimension (with the extra quantum numbers $n,\ k_z$) (See ref. [9] for a detailed discussion of the hopping problem.)

In such a hopping system one has to take into account that actually for each given configuration described by $\rho(x)$ it corresponds a given self-consistent electric field determined by the (one-dimensional) Poisson equation and this is the field that has to figure in eq. (17) instead of the homogenous external field. This self-consistent picture, as we have mentioned earlier, can be avoided only in the stationary flow state. On the other hand, one cannot obtain a stationary flow with localized electrons without introducing external sources (applied to the ends) in the rate eq. (17) (no cyclic boundary conditions being available).

Let us suppose, that by introducing such external sources to the ends, i.e. modifying only the rate equation with $\widetilde{X}$ close to the ends of the sample, one has obtained such a steady flow state. In this steady flow state, the electron charge density should be the same as in the absence of the electric field (which was completely compensated by the fixed positive charge of the ions) and consequently the self-consistent electric field coincides coincides with the constant external electric field $E_{\perp}$. Then one may compute the average current of eq. (20) putting $\overline{n}_{\widetilde{\nu}} = f(\varepsilon_{\nu})$ (ε_{ν} - without electric field!) and keeping the electric field dependence up to terms of first order in $E_{\perp}$ in the transition rates one has:

$$j_x(x) = \frac{e^2}{kT} \sum_{\nu, \nu'} \theta\left(x - \widetilde{X}\right) \theta\left(\widetilde{X}' - x\right) W_{\nu\nu'} f_{\nu} \left(1 - f_{\nu'}\right) (X - X') \tag{21}$$

Since the flow is constant along the sample, one may compute instead:

$$j_X = \lim_{L_x \to \infty} \frac{1}{L_x} \int_0^{L_x} dx\ j_x(x) \tag{22}$$

that gives:

$$j_x(x) = \frac{e^2 E_{\perp}}{2 L_x kT} \sum_{\nu, \nu'} W_{\nu\nu'} f_{\nu} \left(1 - f_{\nu'}\right) (X - X')^2 \tag{23}$$

From this relation one has immediately for the transverse conductivity

$$\sigma_{xx} = \frac{e^2}{2kTL_x} \sum_{\nu,\nu'} W_{\nu\nu'} f_\nu \left(1 - f_{\nu'}\right) \left(X - X'\right)^2 \tag{24}$$

which is Ţiţeica's basic results.

Now one has still to verify whether the modification of the rate equation (17) only at the ends is sufficient to produce the requested solution. One may easily verify that $f\left(\varepsilon_\nu\right)$ is the stationary solution of eq. (17) (in the linear approximation with respect to the electrical field) if and only if the condition

$$\sum_{\nu,\nu'} W_{\nu\nu'} f_\nu \left(1 - f_{\nu'}\right) \left(X_\nu - X_{\nu'}\right) = 0 \tag{25}$$

is satisfied. Now, it can be shown that the transition rates given by the electron-phonon interaction are decreasing, even functions of $(X_\nu - X_{\nu'})$. Therefore, for any X_ν sufficiently far from the end condition (25) is well satisfied. This reasoning justifies the way we obtained eq. (24).

Let us look now to the weak magnetic field limit of the quantum mechanical formula, eq. (24).(This limit is not meaningless, since one may have

$$\frac{1}{\tau} \ll \omega_0 \ll \frac{kT}{\hbar}$$

and there should be be an overlap with the validity of the classical theory). Replacing X through k_y by using its definition eq. (14) one has

$$\sigma_{xx} = \frac{1}{\omega_0^2} \frac{e^2 h^2}{2m^2 kT} \frac{1}{L_x} \sum_{\nu,\nu'} W_{\nu\nu'} f_\nu \left(1 - f_{\nu'}\right) \left(k_y - k_y'\right)^2$$

This expression can be put under the form

$$\sigma_{xx} = -\frac{1}{\omega_0^2} \frac{e^2}{2m^2 kT} \frac{1}{\Omega} \int_0^\infty dt e^{-st} \left\langle [k_y, V] \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\widehat{H}t\right) [k_y, V] \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\widehat{H}t\right) \right\rangle \tag{26}$$

where the brackets $\langle ... \rangle$ indicate an average over the equilibrium density matrix (of the second quantization formalism) of the Landau problem described by the hamiltonian $\widehat{H}$. The operator V is the electron-phonon interaction hamiltonian. Under this form it is easy to perform the $\omega_0 \to 0$ limit by replacing $\widehat{H}$ with the hamiltonian of free electrons. Inserting this complete system of free electron states one arrives at (in the infinite volume limit):

$$\sigma_{xx} = \lim_{\omega_0 \to 0} \frac{1}{\omega_0^2} \frac{e^2 \hbar^2 \left(2\pi\right)^6}{2m^2 kT} \frac{1}{\Omega} \int d\overrightarrow{k} \int d\overrightarrow{k'} W\left(\overrightarrow{k}, \overrightarrow{k'}\right) f\left(\varepsilon_{\overrightarrow{k}}\right) \left(1 - f\left(\varepsilon_{\overrightarrow{k'}}\right)\right) \left(k_y - k_y'\right)^2 \tag{27}$$

which coincides with the strong magnetic field limit eq. (11) of the classical theory. This is a nice check of Ţiţeica's formula.

In what concerns the non-diagonal conductivity σ_{xy}, Ţiţeica's observation was that the average velocity along the Oy direction in a state $\psi_{\widetilde{\nu}}$ is:

$$\overline{(v_y)_{\widetilde{\nu}}} = \frac{1}{m}\int d\overrightarrow{r}\,\psi^*_{\widetilde{\nu}}\left(\widehat{p_y} + \frac{eH}{c}x\right)\psi_\nu = -\frac{eE_\perp}{m\omega_0}$$

Therefore, like in the classical theory, for weak scattering ($\omega_0\tau \gg 1$), one has

$$\sigma_{xy} = -\sigma_{yx} = \frac{1}{\omega_0}\frac{ne^2}{m} \tag{28}$$

Twenty years after Ţiţeica' paper, the transverse magnetoresistance problem was reanalyzed by several authors within the frame of the linear response theory for the quantum mechanical density matrix. Kubo, Hasegawa and Hashitsume [6] started from the Kubo formula [8] for the conductivity expressed through the quantum mechanical correlator of the velocities

$$\sigma_{xx} = \frac{e^2}{\Omega}\int_0^\infty dte^{-st}\int_0^\beta d\lambda\,\langle x'\left(-ih\lambda\right)x'\left(t\right)\rangle\,, \quad s\to +0 \tag{29}$$

These authors assume, that the coordinate of the relative motion $\xi = x - X$ may be considered bounded (in an effective sense in strong magnetic fields) and that there are no correlations at infinite times. Then formula (29) reduces to the correlator of the cyclotronic motion velocities:

$$\sigma_{xx} = \frac{e^2}{\Omega}\int_0^\infty dte^{-st}\int_0^\beta d\lambda\,\langle X'\left(-i\hbar\lambda\right)X'\left(t\right)\rangle\,, \quad s\to +0 \tag{30}$$

Taking into account that the cyclotronic coordinate commutes with the unperturbed hamiltonian (the interaction being the electron - scatterer interaction V) one has again a typical hopping problem, where the time derivative of the coordinate is nonvanishing only due to the perturbation:

$$X' = \frac{e}{i\hbar}\left[V, X\right] = \frac{ie}{m\omega_0}\left[V, \widehat{k}_y\right] \tag{31}$$

Therefore, in the lowest order approximation with respect to V, one finds again eq. (26), which is just Ţiţeica's result.

This theory, although enlightening, is still far from rigour. No explicit proof of the "boundedness" of the relative coordinate has been given and the straightforward applicability of perturbation theory to eq. (30) is not at all evident. A more careful analysis of this latter problem reveals [9] that eq. (25) is again the necessary condition to be satisfied. If this condition wold not be satisfied (for any X in the $\Omega\to\infty$ limit), then in each even order of the perturbation series (excepting the lowest) there would appear diverging terms, showing the inapplicability of simple perturbation theory.

A contribution to the clarification of the importance of the neglected correlations (containing the relative coordinate) is the paper of Adams and Holstein [7]. These authors have computed all the contributions of order V^2 of the linear response theory and found none others than those retained in ref. [6].

They have performed also an extensive computation of both the longitudinal and transverse resistivities in several ranges of the magnetic field, for different scattering mechanisms.

Here we must remark that, as it stands, formula (24) cannot be applied to elastic scattering, giving a divergent answer. The reason is again to be found in the inadequacy of the perturbational treatment.

We may conclude, that these developments actually have not succeeded to replace the basic assumption of Ţiţeica, about the description of the charge transport as the cyclotronic center migration, by a first principle derivation; but they have increased the confidence in the correctness of the picture.

As we have seen, for the transverse magnetoresistance Ţiţeica's theory provides a simple formula, while for the longitudinal one there remains the difficult problem of solving a complicated rate equation. This is one of the reasons why transverse magnetoresistance is considered more interesting, being more accessible for unbiased comparison between theory and experiment.

The field and temperature dependences given in low ($\hbar\omega_0 \lesssim kT$) or very high ($\hbar\omega_0 \gg kT$) magnetic fields given by Ţiţeica's formula eq. (24) are strongly dependent on the type of the scattering mechanism and therefore less significant. However, in the intermediary region, the formula exhibits for low temperatures (degenerate statistics) [5] a very important oscillatory effect - the Shubnikov - de Haas effect, giving rise to maxima of $\rho_\perp$ for the values of the magnetic field satisfying

$$\varepsilon_F = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

This is independent of the nature of the scattering mechanism and is well confirmed by experimental data.

Among other interesting phenomena explained with the help of eq. (24) one should mention also the so-called magneto-plasmonic oscillations [10], that occur at arbitrary temperature in the case of scattering by optical phonons. Here the maxima occur whenever the optical phonon frequency coincides with a multiple of ω_0, giving rise to a one-dimensional elastic scattering term in eq. (24).

References

[1] T. Kasuya and S. Koide, J.Phys.Soc.Japan **13** 1287 (1958)

[2] H. Böttger and V. V. Bryksin, Phys.Stat.Sol. (b) **78** 9 (1976)

[3] L. Bányai and A. Aldea, Phys.Stat. (b) **79** 365 (1977)

[4] Ş. Ţiţeica, Ann.der Physik (5) **22** 129 (1935)

[5] B. Davydov, I. Pomeranchuk, J.Phys.USSR **2** 147 (1940)

[6] R. Kubo, H. Hasegawa, N. Hashitsume, J.Phys.Soc.Japan **14** 56 (1959)

[7] E. N. Adams, T. D. Holstein, J.Phys.Chem.Solids **10** 254 (1959)

[8] R. Kubo, J.Phys.Soc.Japan **12** 570 (1957)

[9] L. Bányai and A. Aldea, preprint (1978)

[10] V. L. Gurevich, I. A. Firsov, JETF **40** 199 (1961)

Lista citărilor tezei

Teza de doctorat a lui Şerban Ţiţeica este citată in următoarele lucrări:

1. Jesus Iñarrea,
   Microscopic theory for radiation-induced zero-resistance states in 2D electron systems: Franck-Condon blockade, Applied Physics Letters **110**, 143105 (2017)
   (5 pages).

2. C. A. Downing and M. E. Portnoi,
   Magnetic quantum dots and rings in two dimensions, Physical Review B **94**, 045430 (2016) (8 pages).

3. A. M. Alexeev, R. R. Hartmann, and M. E. Portnoi,
   Two-phonon scattering in graphene in the quantum Hall regime, Physical Review B **92**, 195431 (2015) (6 pages).

4. L. I. Magarill and M. V. Entin,
   Surface Photocurrent in an Electron Gas over Liquid He Subjected to a Quantizing Magnetic Field, JETP Letters **101**, 744–749 (2015).

5. C. Zoth, P. Olbrich, P. Vierling, K.-M. Dantscher, V. V. Bel'kov, M. A. Semina, M. M. Glazov, L. E. Golub, D. A. Kozlov, Z. D. Kvon, N. N. Mikhailov, S. A. Dvoretsky, and S. D. Ganichev,
   Quantum oscillations of photocurrents in HgTe quantum wells with Dirac and parabolic dispersions, Physical Review B **90**, 205415 (2014) (15 pages).

6. M. V. Cheremisin,
   On the magnetotransport of 3D systems in quantizing magnetic field, Solid State Communications **200**, 48-50 (2014).

7. Z. Q. Liu, W. M. Lü, X. Wang, Z. Huang, A. Annadi, S. W. Zeng, T. Venkatesan, and Ariando,
   Magnetic-field induced resistivity minimum with in-plane linear magnetoresistance of the Fermi liquid in $SrTiO_{3-x}$ *single crystals*, Physical Review B **85**, 155114 (2012) (5 pages).

8. M. V. Entin and L. I. Magarill,
   Conductivity of 2D multi-component electron gas partially-quantized by magnetic field, European Physical Journal B **81**, 225–230 (2011).

9. Zhuoquan Yuan,
   Quantum Transport in Spatially Modulated Two-Dimensional Electron and Hole Systems, Ph. D. thesis, Rice University, Houston, Texas, 2009.

10. Yurii A. Firsov,
Small Polarons: Transport Phenomena, pp. 63-105 in the book:
A. S. Alexandrov, Ed., *Polarons in Advanced Materials*,
Springer Series in Materials Science, Volume **103**, Springer, Berlin, 2007.

11. Christian Benjamin Joas,
Quantum Hall Systems in High Landau Levels, Dissertation, Freie Universität Berlin, 2007.

12. V. A. Volkov and E. E. Takhtamirov,
Plasmon mechanism of resistance magnetooscillations in a two-dimensional electron system in strong electric fields, Journal of Experimental and Theoretical Physics **104**, 602–619 (2007).

13. Ladislaus Alexander Bányai,
Lectures on Non-Equilibrium Theory of Condensed Matter, World Scientific, Singapore, 2006.

14. Jürgen Dietel,
Microwave photoconductivity of a periodically modulated two-dimensional electron system: Striped states and overlapping Landau levels, Physical Review B **73**, 125350 (2006) (20 pages).

15. Christian Joas, Jürgen Dietel, and Felix von Oppen,
Microwave photoconductivity of a modulated two-dimensional electron gas due to intra-Landau-level transitions, Physical Review B **72**, 165323 (2005) (6 pages).

16. N. A. Poklonski, S. A. Vyrko, and A. G. Zabrodskii,
Fluctuation model of the high-frequency hopping electrical conductivity of moderately compensated semiconductors with hydrogenic impurities, Physics of the Solid State **47**, 1236–1244 (2005).

17. Sergei I. Dorozhkin,
Millimeter-wave response in the magnetoconductivity of highly perfect two-dimensional electron systems, Physics Uspekhi **48**, 198–203 (2005).

18. M. V. Kartsovnik and V. G. Peschansky,
Galvanomagnetic phenomena in layered organic conductors (Review), Low Temperature Physics **31**, 185–202 (2005).

19. Jürgen Dietel, Leonid I. Glazman, Frank W. J. Hekking, and Felix von Oppen,
Microwave photoconductivity of two-dimensional electron systems with unidirectional periodic modulation, Physical Review B **71**, 045329 (2005) (15 pages).

20. Changli Yang,
New quantum oscillations in magneto transport of a high-mobility two-dimensional electron system, Ph.D. Thesis, University of Utah, Salt Lake City, Utah, 2004.

21. S. Olszewski, M. Pietrachowicz, and M. Baszczak,
Magnetoconductivity of planar crystalline systems and its semiclassical quantization, Physica Status Solidi (b) **241**, 3572–3599 (2004).

22. M. I. Kaganov and V. G. Peschansky,
Galvano-magnetic phenomena today and forty years ago, Physics Reports **372**, 445–487 (2002).

23. Carolyne M. Van Vliet and Andres Barrios,
Quantum electron transport beyond linear response, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications **315**, 493–536 (2002).

24. V. M. Apalkov and M. E. Portnoi,
Electron-phonon interaction in a two-subband quasi-2D system in a quantizing magnetic field, Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures **12**, 470–473 (2002).

25. C. L. Yang, J. Zhang, R. R. Du, J. A. Simmons, and J. L. Reno,
Zener Tunneling Between Landau Orbits in a High-Mobility Two-Dimensional Electron Gas, Physical Review Letters **89**, 076801 (2002) (4 pages).

26. M. A. Zudov, I. V. Ponomarev, A. L. Efros, R. R. Du, J. A. Simmons, and J. L. Reno,
New Class of Magnetoresistance Oscillations: Interaction of a Two-Dimensional Electron Gas with Leaky Interface Phonons, Physical Review Letters **86**, 3614–3617 (2001).

27. S. S. Murzin,
Electron transport in a magnetic field in the ultra-quantum limit, Uspekhi Fizicheskikh Nauk **170**, 387–402 (2000).

28. S. M. Dikman and V. W. Zhilin,
Donors in a strong magnetic field and elastic magnetic-impurity resonance in
diamondlike semiconductors, Journal of Experimental and Theoretical Physics **85**, 528–547 (1997).

29. F. H. Salas and D. Weller,
Magnetization reversal of Gd(0001) thin films: TBIS- and MOKE butterflies in UHV, Journal of Magnetism and Magnetic Materials **128**, 209–218 (1993).

30. Hidehiko Iguchi,
High-electric-field behavior of the magnetophonon resonance in polar semiconductors, Physical Review B **47**, 7049–7060 (1993).

31. V. Polyanovsky,
High-temperature quantum oscillations of the magnetoresistance in layered systems, Physical Review B **47**, 1985–1990 (1993).

32. Gerrit E. W. Bauer,
Excitons in the quasi-two-dimensional electron gas, Physical Review B **45**, 9153–9162 (1992).

33. Yu. A. Firsov, V. L. Gurevich, R. V. Parfeniev, and I. M. Tsidilkovskii,
Magnetophonon Resonance, Modern Problems in Condensed Matter Sciences **27**, 1181-1302 (1991).

34. János Hajdu,
The Shubnikov-de Haas Effect: An Introduction to the Theory, Modern Problems in Condensed Matter Sciences **27**, 997-1030 (1991).

35. R. A. Suris and B. S. Shchamkhalova,
Conductivity of a semiconductor superlattice in a magnetic field perpendicular to its axis, Soviet Physics-Semiconductors **24**, 1023-1026 (1990).

36. P. Vasilopoulos and F. M. Peeters,
Magnetoresistance and Hall resistance in a 1d periodically modulated two-dimensional electron gas, Surface Science **229**, 96-100 (1990).

37. Sun Churl Han,
Theory of conductivity in a magnetic field, The Journal of Institute of Material Science and Technology **2**, 37 (1989).

38. V. B. Sandomirskii, V. A. Volkov, G. R. Aizin, and S.A. Mikhailov,
Some properties of two-dimensional electron systems at semiconductor interfaces, Electrochimica Acta **34**, 3–17 (1989).

39. Carolyne M. Van Vliet and P. Vasilopoulos,
The quantum Boltzmann equation and some applications to transport phenomena, Journal of Physics and Chemistry of Solids **49**, 639-649 (1988).

40. G. R. Aizin and V. A. Volkov,
Transition from classical to quantum Hall effect in a system with one-dimensional periodic potential, Zhurnal Eksperimentalnoi i Teoreticheskoi Fiziki **92**, 329–338 (1987).

41. H. Aoki and T. Ando,
Quantum Hall Effect: From the Winding Number to the Flow Diagram, pp. 45–48 in the book: Gottfried Landwehr, Ed., *High Magnetic Fields in Semiconductor Physics*, Springer Series in Solid-State Sciences, Volume **71**, Springer, Berlin, Heidelberg, 1987.

42. W. Brenig,
Scattering Approach to the Quantum Hall Effect, pp. 49–52 in the book: Gottfried Landwehr, Ed., *High Magnetic Fields in Semiconductor Physics*, Springer Series in Solid-State Sciences, Volume **71**, Springer, Berlin, Heidelberg, 1987.

43. János Hajdu and Gottfried Landwehr,
Quantum Transport Phenomena in Semiconductors in High Magnetic Fields, pp. 17–112 (See p. 38) in the book: F. Herlach, Ed., *Strong and Ultrastrong Magnetic Fields and Their Applications*, Springer, Berlin, 1985.

44. J. F. Palmier, H. Le Person, C. Minot, A. Chomette, A. Regreny, and D. Calecki,
Hopping mobility in semiconductor superlattices, Superlattices and Microstructures **1**, 67-72 (1985).

45. Shyamal Chaudhury,
Quantum Theory of Transverse Magnetoconductivity for Semiconductors, Ph. D. Thesis, State University of New York at Buffalo, 1984.

46. D. Calecki, J. F. Palmier, and A. Chomette,
Hopping conduction in multiquantum well structures , Journal of Physics C: Solid State Physics **17**, 5017–5030 (1984).

47. S. S. Murzin,
Conductivity of metals and semiconductors with defects with long-range and short-range potentials in a magnetic field, JETP Letters **39**, 695–697 (1984).

48. S. P. Andreyev,
Spectra and kinetics of systems with magnetic-impurity states in a potential with finite range, Soviet Physics Uspekhi **27**, 431–447 (1984).

49. V. M. Kontorovich,
Dynamic equations of the elasticity theory in metals, Uspekhi Fizicheskikh Nauk **142**, 265–307 (1984).

50. P. K. Hoch,
A key concept from the electron theory of metals: history of the Fermi surface 1933-60, Contemporary Physics **24**, 3–23 (1983).

51. Tyuzi Ohyama,
Direct Observation of Impact Ionization and Hot Electron Effects in GaAs, Japanese Journal of Applied Physics **22**, L188-L190 (1983).

52. B. K. Ridley,
Negative mobility in the extreme quantum limit of transverse galvanomagnetic conduction, Journal of Physics C: Solid State Physics **16**, 2261–2264 (1983).

53. N. B. Brandt and S. M. Chudinov,
The Shubnikov-de Haas effect and its applications for the study of the energy-spectrum of metals, semimetals and semiconductors, Uspekhi Fizicheskikh Nauk **137**, 479–499 (1982).

54. S. P. Andreyev and S. V. Tkachenko,
The theory of transverse galvanomagnetic phenomena in semiconductors, Zhurnal Eksperimentalnoi i Teoreticheskoi Fiziki **82**, 915–926 (1982).

55. Ho Yu-ping, Hu Xi-wei and Chen Zheng-xiong,
Transverse Transport Processes of Charged Particle Systems in a Strong Magnetic Field: (I) Quantum Theory, Communications in Theoretical Physics **1**, 427–440 (1982).

56. Gottfried Landwehr,
Präzisionsbestimmung der Feinstrukturkonstanten aus Magnetotransportmessungen an Halbleiter-Randschichten, Physikalische Blätter **37**, 59-65 (1981).

57. E. M. Lifshitz and L. P. Pitaevskii,
Physical Kinetics, (L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Course of Theoretical Physics*, Volume 10). See pp. 384–386.
Translated from the Russian by J. B. Sykes and R. N. Franklin, Oxford. Butterworth-Heinemann, Elsevier, Oxford, 1981.

58. Vijay K. Arora,
Interference effect in the theory of magnetotransport in a transverse configuration, Physical Review B **24**, 1099–1102 (1981).

59. M. Charbonneau and Carolyne M. Van Vliet,
Conductance et magnétorésistance transversale à partir de l'équation de Boltzmann quantique, Physica Status Solidi (b) **101**, 509-518 (1980).

60. János Hajdu,
Quantum Magnetotransport Theory, pp.195-215 in the book: J. T. Devreese, Ed., *Theoretical Aspects and New Developments in Magneto-Optics*, NATO Advanced Study Institutes Series (Series B: Physics), Volume **60**, Springer, Boston, Massachusetts, 1980.

61. Vijay K. Arora and M. A. Al-Mass'ari,
On transverse magnetoconductivity in strict Born approximation, Solid State Communications **36**, 191–193 (1980).

62. János Hajdu,
Some aspects of the high-field magnetoresistance in semiconductors, pp. 219-244 in the book *Narrow-Gap Semiconductors-Physics and Applications*,
Springer Lecture Notes in Physics, Volume **133**, Springer, Berlin, 1980.

63. D. Calecki,
Hot Electron Distribution Function in Quantizing Magnetic Fields, pp. 289-310 in the book: D. K. Ferry, J. R. Barker, C. Jacoboni, Eds., *Physics of Nonlinear Transport in Semiconductors*, NATO Advanced Study Institutes Series (Series B: Physics), Volume **52**, Springer, Boston, Massachusetts, 1980.

64. Rudolf Herrmann and Uwe Preppernau,
Elektronen im Kristall, Springer, Vienna, 1979.

65. L. Bányai and A. Aldea,
Master-equation approach to the hopping-transport theory, Fortschritte der Physik **27**, 435-462 (1979).

66. S. P.Andreyev,
Conductivity oscillations of charge carriers with an anisotropic energy spectrum in a quantized magnetic field, Zhurnal Eksperimentalnoi i Teoreticheskoi Fiziki **77**, 1046-1057 (1979).

67. M. I. Kaganov and I. M. Lifshitz,
Electron theory of metals and geometry, Soviet Physics Uspekhi **22**, 904–927 (1979).

68. Yu. M. Galperin, V. L. Gurevich, and V. I. Kozub,
Nonlinear effects in the propagation of high-frequency sound in normal conductors, Soviet Physics Uspekhi **22**, 352–367 (1979).

69. A. I. Anselm,
Introduction to semiconductor theory, Russian edition, 1978; English translation, Mir Publishers, Moscow, 1981.

70. A. Aldea and L. Bányai,
The transverse magnetoresistance in high magnetic fields as a hopping conduction problem, pp. 121-137 in the book: *Topics in Theoretical Physics - A volume dedicated to Şerban Ţiţeica at his* 70*th anniversary*, Editor: Central Institute of Physics, Bucharest, March 1978.

71. J. R. Barker,
Hot electron quantum magneto-transport, Solid-State Electronics **21**, 197–214 (1978).

72. W. Gotze and J. Hajdu,
On the theory of the transverse dynamic magneto-conductivity, Journal of Physics C: Solid State Physics **11**, 3993–4008 (1978).

73. V. N. Abakumov, L. N. Kreshchouk, and I. N. Yassievich,
Cascade capture in a quantized magnetic field, Zhurnal Eksperimentalnoi i Teoreticheskoi Fiziki **75**, 1342-1355 (1978).

74. L. I. Magarill and A. V. Chaplik,
Galvanomagnetic effects in a spatially inhomogeneous system, Zhurnal Eksperimentalnoi i Teoreticheskoi Fiziki **74**, 2196-2205 (1978).

75. I. I. Pinchuk,
Electroconductivity of semiconductors in crossed electric and quantizing magnetic field, Fizika Tverdogo Tela **20**, 2581-2590 (1978).

76. T. Ando,
Inter-subband optical absorption in an inversion layer on a semiconductor surface in magnetic fields, Solid State Communications **21**, 801–804 (1977).

77. D. Calecki, C. Lewiner, and P. Nozières,
Quantum energy-distribution function of hot electrons in crossed electric and magnetic fields, Journal de Physique **38**, 169–177 (1977).

78. L. Bányai and A. Aldea,
Semiclassical and quantum-mechanical theory of hopping conduction, Physica Status Solidi (b) **79**, 365–377 (1977).

79. H. Böttger and V. V. Bryksin,
Hopping Conductivity in Ordered and Disordered Solids (I), Physica Status Solidi (b) **78**, 9–56 (1976).

80. L. Bányai and A. Aldea,
Theory of hopping conduction, Revue Roumaine de Physique **21**, 917–928 (1976).

81. N. J. Doran and E. Gerlach,
A new theory for the transverse magneto-resistance in the quantum limit which includes screening, Physica Status Solidi (b) **75**, K15–K18 (1976).

82. R. G. Agaeva, B. M. Askerov, and F. M. Gashimzade,
Quantum theory of nonlinear galvanomagnetic effects in Kane semiconductors, Soviet Physics-Semiconductors **10**, 1268–1270 (1976).

83. M. S. Wartak,
Kinetic equations for electrons in metals interacting with acoustic waves in anisotropic Fermi-liquid model, Acta Physica Polonica **A 47**, 285–289 (1975).

84. R. G. Agaeva, B. M. Askerov, and R. F. Eminov,
Quantum theory of Nernst-Ettingshausen effect in semiconductors with Kanes dispersion law, Physica Status Solidi (b) **69**, K63–K67 (1975).

85. E. Gornik,
Shallow donors and magnetic freeze-out in n-InSb, Acta Physica Austriaca **40**, 52–87 (1974).

86. V. V. Bryksin and Yu. A. Firsov,
Transport phenomena in arbitrary electric and magnetic fields without interelectron correlations, Fizika Tverdogo Tela **15**, 3235–3249 (1973).

87. Yuan-Shun Way, Yi-Han Kao, and Shou-yih Wang,
High-Field Magnetoresistance of Nonparabolic-Band and Bismuth-Type Metals, Physical Review B **8**, 3500–3511 (1973).

88. Yu. M. Galperin, V. L. Gurevich, and V. I. Kozub,
Nonlinear acoustic effects in superconductors, Zhurnal Eksperimentalnoi i Teoreticheskoi Fiziki **65**, 1045-1060 (1973).

89. E. Yamada and T. Kurosawa,
Theory of hot electrons in strong magnetic fields, Journal of the Physical Society of Japan **34**, 603–612 (1973).

90. Kyu-Myung Chung und Bernhard Mrowka,
Neue Beiträge zur Theorie der elektrischen Widerstandsänderung im Magnetfeld, Zeitschrift für Physik **259**, 157-176 (1973).

91. Maurice Glicksman,
Transport Processes in Solids, AIP Conference Proceedings **11**, 99 (1973).

92. I. M. Lifshitz, M. Y. Azbel, and M. I. Kaganov,
Electron theory of metals, Plenum, New York, 1973.

93. L. A. Shishkin and Y. V. Pereverz,
Transfer phenomena at low temperatures in an electron-phonon system in strong magnetic fields, Physics of Metals and Metallography **33**, 28–36 (1972).

94. Yu. A. Gurvich,
Cyclotron-resonance harmonics in a quantizing magnetic field, Soviet Physics JETP **34**, 598 (1972).

95. R. G. Agaeva, B. M. Askerov, and F. M. Gashimzade,
Quantum theory of dissipative thermomagnetic currents in semiconductors, Soviet Physics-Solid State **13**, 1732 (1972).

96. A. M. Zlobin and P. S. Zyryanov,
Hot electrons in semiconductors subjected to quantizing magnetic fields, Soviet Physics Uspekhi **14**, 379-393 (1972).

97. Ion Licea,
Hot electron transverse conductivity in quantizing magnetic fields, Zeitschrift für Physik **249**, 115–124 (1971).

98. D. Calecki,
Phénomènes galvanomagnétiques non linéaires B–Théorie quantique, Journal of Physics and Chemistry of Solids **32**, 1835–1852 (1971).

99. V. V. Bryksin and Yu. A. Firsov,
General theory of transport phenomena in semiconductors subjected to a strong electric field, Fizika Tverdogo Tela **13**, 3246-3259 (1971).

100. Pierre Véronneau,
Magnetoresistance in the extreme quantum limit, Ph. D. Thesis, McGill University, Montréal, Québec, 1971.

101. Robert L. Peterson,
Numerical Study of Deformation-Potential Scattering of Electrons by Optical Phonons in a Longitudinal Magnetic Field, Physical Review B **2**, 4135–4144 (1970).

102. A. M. Zlobin and P. S. Zyryanov,
Effect of a quantizing magnetic field on electron-electron collisions in semiconductors and nonlinear galvanomagnetic phenomena,
Soviet Physics JETP **31**, 513–517 (1970).

103. B. M. Askerov,
Quantum theory of thermomagnetic effects in semiconductors,
Soviet Physics-Semiconductors **4**, 680–682 (1970).

104. A. D. Gladun and V. I. Ryzhyi,
Mechanisms of absolute negative conductivity of thin films in a transverse quantized magnetic field, Soviet Physics JETP **30**, 534–536 (1970).

105. János Hajdu,
Quantum transport theory, pp. 305–325 in the conference book *Electronic structures in solids*, Plenum, London, 1969.

106. B. A. Tavger and V. Y. Demikhovskii,
Quantum size effects in semiconducting and semimetallic films, Soviet Physics Uspekhi **11**, 644–658 (1969).

107. V. P. Kalashnikov,
On the nuclear polarization by D.C. in semiconductors, Physics Letters **28 A**, 565–566 (1969).

108. J. Yahia, C. C. Lee, and E. Fournier,
Zero Resistance in a Longitudinal Magnetic Field for Gallium Single Crystals at Liquid-Helium Temperatures, Physical Review Letters **23**, 293–297 (1969).

109. L. E. Gurevich and T. M. Gasymov,
Phonon heating in a semiconductor in a strong electric field and a quantizing magnetic field and its effect on electrical conductivity, Soviet Physics-Solid State **10**, 2577 (1969).

110. D. Langbein,
Wave packet approach to lattice electrons in external galvanomagnetic fields.
1. Circling free wave packets, Physik der Kondensierten Materie **10**, 21–28 (1969).

111. L. Bányai,
Teoria cuantică a coeficienţilor de transport, pp. 13–35 in the book: Valeriu Novacu, Ed., *Seminar de Fizică teoretică* **1**, Editura Academiei Române, Bucharest, 1968.

112. H. F. Budd,
Transport Theory in Strong Magnetic Fields, Physical Review **175**, 241–251 (1968).

113. M. I. Klinger,
Electrons in low-mobility and disordered semiconductors–theory of transport and related optical phenomena, Reports on Progress in Physics **31**, 225–304 (1968).

114. Yu. M. Galperin,
Quantum oscillations of thermomagnetic coefficients in strong magnetic fields,
Soviet Physics-Solid State **9**, 2029 (1968).

115. G. I. Guseva and P. S. Zyryanov,
Quantum theory of thermogalvanomagnetic phenomena (tgmp) in conductors with equal concentration of electrons and holes, Physica Status Solidi (b) **25**, 775–785 (1968).

116. J. W. McClure and W. J. Spry,
Linear Magnetoresistance in Quantum Limit in Graphite, Physical Review **165**, 809–815 (1968).

117. L. A. Shishkin,
On theory of low-temperature electrical conductivity of ferromagnetic metals in strong magnetic fields, Physics of Metals and Metallography **26**, 15 (1968).

118. Eike Bangert,
Zur Quantentheorie der magnetischen Widerstandsänderung II. Elektron-Phonon-System, Zeitschrift für Physik **215**, 192-209 (1968).

119. Eike Bangert,
Zur Quantentheorie der magnetischen Widerstandsänderung I. Elektron-Störstellen-System, Zeitschrift für Physik **215**, 177-191 (1968).

120. D. Calecki,
Théorie quantique des phénomènes galvanomagnétiques non linéaires -

cas des fortes inductions magnétiques, Journal of Physics and Chemistry of Solids **28**, 1409–1418 (1967).

121. Q. H. F. Vrehen, W. Zawadzki, and M. Reine,
Shift of Landau Levels in the Valence Band of Germanium in Crossed Electric and Magnetic Fields, Physical Review **158**, 702–708 (1967).

122. Charles C. Chen and Shigeji Fujita,
Quantum theory of dynamic magnetoresistance, Journal of Physics and Chemistry of Solids **28**, 607–614 (1967).

123. A. I. Anselm and B. M. Askerov,
Quantum theory of the Nernst-Ettingshausen effect in semiconductors, Soviet Physics-Solid State **9**, 22–29 (1967).

124. János Hajdu and Hellmut Keiter,
On the Interference Effect in the Theory of Transport Phenomena, Zeitschrift für Physik **201**, 507–522 (1967).

125. Hellmut Keiter,
Über den Einfluss der Coulomb-Wechselwirkung zwischen den Elektronen auf den Restwiderstand im Magnetfeld, Zeitschrift für Physik **198**, 215-235 (1967).

126. B. A. Tavger and M. Sh. Erukhimov,
Nonlinear Dependence of the Current on the Electric Field Strength in a Thin Semiconducting Film in a Quantizing Magnetic Field, Soviet Physics JETP **24**, 354 (1967).

127. Petros N. Argyres,
Theory of the method of kinetic equations for quantum systems and elementary applications, in the book: W. E. Britten, B. D. Downs, and J. Downs, Eds., *Lectures in Theoretical Physics* **7**, (Boulder, Colorado), Interscience, New York, 1966.

128. Laura M. Roth and Petros N. Argyres,
Magnetic Quantum Effects, Semiconductors and Semimetals **1**, 159-202 (1966).

129. H. Scher and T. Holstein,
High-Frequency Cyclotron Resonance in an Electron-Phonon Gas, Physical Review **148**, 598–631 (1966).

130. A. I. Anselm, Y. N. Obraztsov, and R. G. Tarkhanian,
Quantum theory of thermomagnetic currents in semiconductors and metals, Soviet Physics-Solid State **7**, 2293–2297 (1966).

131. Lowell Dworin,
Transport properties of an electron gas in a magnetic field: I. The nonoscillatory transport coefficients, Annals of Physics **38**, 431–509 (1966).

132. Shigeji Fujita and Charles C. Chen,
Correlation function formulae, transport coefficient and dynamic magnetoresistance, Physics Letters **21**, 484–485 (1966).

133. William Conyers Herring,
Quantum Transport in High Magnetic Fields, Journal of the Physical Society of Japan **S 21**, R5 (1966).

134. A. K. Rajagopal,
The Dielectric Constant of Bloch Electrons in Crossed Electric and Magnetic Fields, Nuovo Cimento **46 B**, 46–67 (1966).

135. Ryogo Kubo, Satoru J. Miyake, Natsuki Hashitsume,
Quantum Theory of Galvanomagnetic Effect at Extremely Strong Magnetic Fields, Solid State Physics **17**, 269-364 (1965).

136. T. Shindo,
Quantum theory of valence band structure of germanium in external electric and magnetic fields, Journal of Physics and Chemistry of Solids **26**, 1431–1443 (1965).

137. Lowell Dworin,
Transverse Conductivity of a Degenerate System of Landau Electrons and Optical Phonons, Physical Review **140**, A1689–A1704 (1965).

138. S. M. Puri,
Phonon Drag and Phonon Interactions in n-InSb, Physical Review **139**, A995–A1009 (1965).

139. A. I. Akhiezer, V. G. Baryakhtar, and S. V. Peletminskii,
Theory of Transfer Phenomena in Metals in Strong Magnetic Fields, Soviet Physics JETP **21**, 136 (1965).

140. V. G. Baryakhtar and S. V. Peletminskii,
Theory of Thermomagnetic Phenomena in Metals in a Strong Magnetic Field, Soviet Physics JETP **21**, 126 (1965).

141. J. Zak,
Wiedemann-Franz law in the quantum limit for isotropic scattering, Journal of Physics and Chemistry of Solids **26**, 1021–1027 (1965).

142. Sighart Fischer,
Zur Quantentheorie der Transportprozesse im Magnetfeld. III Phononen-Mitführung (phonon drag), Zeitschrift für Physik **184**, 325–338 (1965).

143. R. T. Delves,
Thermomagnetic effects in semiconductors and semimetals, Reports on Progress in Physics **28**, 249–289 (1965).

144. János Hajdu und Sighart Fischer,
Zur Quantentheorie der Transportprozesse im Magnetfeld. II, Zeitschrift für Physik **181**, 479–493 (1964).

145. D. E. Soule, J. W. McClure, and L. B. Smith,
Study of the Shubnikov–de Haas Effect. Determination of the Fermi Surfaces in Graphite, Physical Review **134**, A453–A470 (1964).

146. Chen Shi-kang,
Perturbation theory of transverse transport process in strong magnetic field, Scientia Sinica **13**, 1587–1603 (1964).

147. Chen Shi-kang,
Perturbation theory of transverse transport process in strong magnetic field, Acta Physica Sinica, **20**, 579–595 (1964).

148. A. I. Akhiezer, V. G. Baryakhtar, and S. V. Peletminskii,
Effect of radiation processes on transport phenomena in a plasma in a strong magnetic field, Soviet Physics JETP **16**, 1231–1235 (1963).

149. G. M. Genkin,
Kinetic treatment of cyclotron resonance in semiconductors, Soviet Physics-Solid State **4**, 1549–1553 (1963).

150. V. L. Gurevich, Yu. A. Firsov, and A. L. Efros,
New type of magnetoresistivity oscillations in semiconductors and semimetals, Soviet Physics-Solid State **4**, 1331–1334 (1963).

151. Geoffrey V. Chester,
The theory of irreversible processes, Reports on Progress in Physics **26**, 411–472 (1963).

152. S. Fujita and F. Mayné,
Theory of transport coefficients. IV. Electrical conductivity in the presence of a strong magnetic field, Physica **29**, 1201-1213 (1963).

153. H. Stolz,
Quantentheorie des Leitfähigkeitstensors im Plasmamodell eines Metalles in einem äusseren Magnetfeld, Physica Status Solidi (b) **2**, 1029-1042 (1962).

154. Shoichi Mase, S. von Molnar, and A. W. Lawson,
Galvanomagnetic Tensor of Bismuth at $20.4\,^\circ K$, Physical Review **127**, 1030–1045 (1962).

155. A. I. Anselm and B. M. Askerov,
Thermomagnetic phenomena in semiconductors in a strong magnetic field for the case of electron scattering by a short-range potential, Soviet Physics-Solid State **3**, 2665–2670 (1962).

156. A. L. Efros,
Oscillations of the transverse electrical conductivity in a strong magnetic field caused by scattering by optical phonons in metals and semimetals, Soviet Physics-Solid State **3**, 2079–2086 (1962).

157. R. F. Kazarinov and V. G. Skobov,
Theory of nonlinear galvanomagnetic phenomena in semiconductors, Soviet Physics JETP **15**, 726–730 (1962).

158. L. E. Gurevich and A. L. Efros,
Effect of mutual entrainment of electrons and phonons on the transverse electrical conductivity in a strong magnetic field, Soviet Physics JETP **14**, 1405–1409 (1962).

159. V. L. Gurevich and Yu. A. Firsov,
Theory of plasma diffusion in a magnetic field, Soviet Physics JETP **14**, 822–832 (1962).

160. K. Yamada,
Conductivities for inhomogeneous electric fields in space and time, Progress of Theoretical Physics **28**, 299-314 (1962).

161. M. I. Klinger,
On the theory of linear irreversible processes in a strong magnetic field, Soviet Physics-Solid State **3**, 974–982 (1961).

162. M. N. Ryabinin,
The longitudinal magnetoresistance of n-germanium type semiconductors in a quantum limit, Soviet Physics-Solid State **3**, 947–949 (1961).

163. A. I. Anselm and B. M. Askerov,
The chemical potential and the criterion for degeneracy of the conductivity electrons in a strong magnetic field, Soviet Physics-Solid State **2**, 2512–2516 (1961).

164. A. I. Anselm and B. M. Askerov,
Thermomagnetic phenomena in semimetals in a strong magnetic field, Soviet Physics-Solid State **2**, 2060–2070 (1961).

165. Kunihide Tanaka, Seiichi Tanuma and Tadao Fukuroi,
Transverse Galvanomagnetic Effect of Bismuth Single Crystal in a Strong Magnetic Field, Science Reports of the Research Institutes,Tohoku University, Series A, Physics, Chemistry and Metallurgy **13**, 67-81 (1961).

166. S. C. Miller and M. A. Omar,
Longitudinal Magnetoresistance in n-Type Germanium: Theoretical, Physical Review **123**, 74–80 (1961).

167. János Hajdu,
Zur Theorie der magnetischen Widerstandsänderung III, Zeitschrift für Physik **163**, 108-118 (1961).

168. János Hajdu,
Zur Theorie der magnetischen Widerstandsänderung II, Zeitschrift für Physik **160**, 481-490 (1960).

169. Arnold H. Kahn,
Electron Scattering in High Magnetic Field, Physical Review **119**, 1189–1192 (1960).

170. Petros N. Argyres,
Quantum Theory of Transport in a Magnetic Field, Physical Review **117**, 315–328 (1960).

171. K. I. Amirkhanov, R. I. Bashirov, and I. E. Zakiev,
Galvanomagnetic phenomena in normal-InSb in magnetic pulse fields, Doklady Akademii Nauk SSSR **132**, 793–796 (1960).

172. Petros N. Argyres and Laura M. Roth,
Theory of electrical conduction in high magnetic fields, Journal of Physics and Chemistry of Solids **12**, 89–96 (1959).

173. E. N. Adams and Theodore D. Holstein,
Quantum theory of transverse galvano-magnetic phenomena, Journal of Physics and Chemistry of Solids **10**, 254–276 (1959).

174. A. H. Kahn and H. P. R. Frederikse,
Oscillatory Behavior of Magnetic Susceptibility and Electronic Conductivity, Solid State Physics-Advances in Research and Applications **9**, 257–291 (1959).

175. Ryogo Kubo, Hiroshi Hasegawa, and Natsuki Hashitsume,
Quantum Theory of Galvanomagnetic Effect. I.: Basic Considerations, Journal of the Physical Society of Japan **14**, 56–74 (1959).

176. Nobuo Mikoshiba,
Interaction of Conduction Electrons with Acoustic Phonons, Journal of the Physical Society of Japan **14**, 22–30 (1959).

177. Otfried Madelung,
Das Verhalten von Halbleitern in hohen Magnetfeldern, pp. 87–123 in the book
Halbleiterprobleme, Advances in Solid State Physics, Volume **HP5**, Springer, Berlin/Heidelberg, 1958.

178. Petros N. Argyres,
Quantum Theory of Galvanomagnetic Effects, Physical Review **109**, 1115–1128 (1958).

179. Petros N. Argyres,
Quantum theory of longitudinal magneto-resistance, Journal of Physics and Chemistry of Solids **4**, 19–26 (1958).

180. M. I. Klinger and P.I. Voroniuk,
Magnetoresistive phenomena in n-Ge type semiconductors in strong magnetic fields, Soviet Physics JETP **6**, 59–66 (1958).

181. Ryogo Kubo, Hiroshi Hasegawa, and Natsuki Hashitsume,
Theory of Galvanomagnetic Effect at High Magnetic Field, Physical Review Letters **1**, 279–281 (1958).

182. R. Barrie,
Magnetoresistance in Strong Magnetic Fields, Proceedings of the Physical Society B **70**, 1008–1010 (1957).

183. M. I. Klinger,
The theory of galvanomagnetic phenomena in semiconductors, Soviet Physics JETP **4**, 831–835 (1957).

184. Roy Olson and Sergio Rodriguez,
Magnetoresistance of Single Crystals of Copper, Physical Review **108**, 1212–1218 (1957).

185. H. P. R. Frederikse and W. R. Hosler,
Galvanomagnetic Effects in n-Type Indium Antimonide, Physical Review **108**, 1136–1145 (1957).

186. Colman Goldberg, E. N. Adams, and R. E. Davis,
Magnetoconductivity in p-Type Germanium, Physical Review **105**, 865–876 (1957).

187. A. G. Samoilovich and L. L. Korenblit,
Quantum theory of kinetic phenomena in semiconductors, Soviet Physics-Technical Physics **2**, 2483-2506 (1957).

188. J. P. Jan,
Galvanomagnetic and thermomagnetic effects in metals, Solid State Physics-Advances in Research and Applications **5**, 1-96 (1957).

189. F. J. Blatt,
Theory of mobility of electrons in solids, Solid State Physics-Advances in Research and Applications **4**, 199-363 (1957).

190. Robert G. Chambers,
Magneto-resistance effects in the group I metals at high fields, Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences, **238**, 344–357 (1957).

191. P. N. Argyres and E. N. Adams,
Longitudinal Magnetoresistance in the Quantum Limit, Physical Review **104**, 900–908 (1956).

192. G. E. Zilberman,
Thermal and galvanometric effects in strong fields at low temperatures, Soviet Physics JETP **2**, 650–656 (1956).

193. M. I. Klinger,
The theory of the Hall effect in ionic semiconductors, Soviet Physics JETP **2**, 383–390 (1956).

194. B. Luthi and J. L. Olsen,
A new effect in the magnetoresistance of aluminium, Nuovo Cimento **3**, 840–841 (1956).

195. J. Appel,
Einfluss der Bahnquantistierung im Magnetfeld auf die longitudinale Widerstandsänderung von kovalenten Halbleitern 11, Zeitschrift für Naturforschung,
Part A-Astrophysik, Physik und Physikalische Chemie **11**, 892–901 (1956).

196. J. W. McClure,
Field Dependence of Magnetoconductivity, Physical Review **101**, 1642–1646 (1956).

197. John A. Swanson,
Saturation Hall Constant of Semiconductors, Physical Review **99**, 1799–1807 (1955).

198. Y. Kanai,
On the Galvanomagnetic Effects in n-Type Indium Antimonide, Journal of the Physical Society of Japan **10**, 718-719 (1955).

199. D. K. C. MacDonald and K. Sarginson,
Galvanomagnetic effects in conductors, Reports on Progress in Physics **15**, 249–274 (1952).

200. D. K. C. MacDonald,
The magneto-resistance of the alkali metals, Proceedings of the Physical Society A **63**, 290–292 (1950).

201. D. K. C. MacDonald and K. Sarginson,
Size effect variation of the electrical conductivity of metals, Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences, **203**, 223–240 (1950).

202. G. J. van den Berg,
The electrical resistance of potassium, tungsten, copper, tin, and lead at low temperatures, Physica **14**, 111–138 (1948).

203. Ernst H. Sondheimer and Alan Herries Wilson,
The theory of the magneto-resistance effects in metals, Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences, **190**, 435–455 (1947).

204. Eduard Grüneisen,
Elektrische Leitfähigkeit der Metalle bei tiefen Temperaturen, pp. 50–116 in the book *Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften*, Springer Tracts in Modern Physics, Volume **21**, Springer, Berlin/Heidelberg, 1945.

205. B. I. Davydov and I. Ya. Pomeranchuk,
The influence of a magnetic field on the electrical conductivity of bismuth single crystals at low temperatures, Journal of Physics-USSR **2**, 147–160 (1940).

206. Friedrich Hund,
Rechnungen über das magnetische Verhalten von kleinen Metallstücken bei tiefen Temperaturen, Annalen der Physik (Leipzig), 5. Folge, **32**, 102–114 (1938).

207. M. Sengupta,
On the Theory of Semi-Conductors in Magnetic Field, Indian Journal of Physics **11**, 319-332 (1937).

208. Leonhard Riedel,
Versuche zur experimentellen Bestimmung der freien Weglänge der Elektronen in Blei und Cadmium, Annalen der Physik (Leipzig), 5. Folge, **28**, 603–631 (1937).

209. R. C. Majumdar,
Die Theorie der Ionosphäre. I. Teil, Zeitschrift für Physik **107**, 599-622 (1937).

210. Arnold Sommerfeld und Boyd Wheeler Bartlett,
Über die longitudinale Widerstandsänderung im Magnetfelde nach der elementaren Theorie, Physikalische Zeitschrift **36**, 894-899 (1935).

211. Arnold Sommerfeld und Boyd Wheeler Bartlett,
Über die longitudinale Widerstandsänderung im Magnetfelde nach der elementaren Theorie, Zeitschrift für Technische Physik **16**, 500–500 (1935).

Şerban Țițeica (1908-1985) este fondatorul școlii românești de fizică teoretică. A fost asistent și apoi conferențiar la Politehnica din București (1935-1941); conferențiar și apoi profesor la Universitatea din Iași (1941-1948); profesor de fizică teoretică al Universității din București (1948-1977).

Contribuții importante în teoria magnetorezistivității, în studiul atenuării fasciculelor de particule, în teoria pozitronilor, în fizica statistică, în teoria grupurilor etc. Membru al Academiei Române, al Academiei de Științe a URSS, al Academiei de Științe a Cehoslovaciei și al Academiei Saxone de Științe din Leipzig; director adjunct al Institutului Unificat de Cercetări Nucleare de la Dubna; redactor-șef al revistelor *Révue Roumaine de Physique* (astăzi, *Romanian Journal of Physics*) și *Studii și cercetări de fizică* (astăzi, *Romanian Reports in Physics*).

Editura Horia Hulubei

Volumul de față prezintă în premieră traducerile în limba română și în limba engleză ale tezei de doctorat a lui Șerban Țițeica (1934), realizată sub conducerea lui Heisenberg. Teza tratează magnetorezistivitatea metalelor, explicând teoretic rezultatele obținute experimental de Kapița, în 1928. Subiectul fusese abordat, fără succes, de Sommerfeld; de asemenea, de Bloch și Peierls. Folosind rezultate recente (1930) din teoria diamagnetismului, ale lui Landau și Teller, Țițeica obține formule rămase valide până astăzi. Prin această lucrare, Țițeica se plasează în elita fizicii teoretice europene.

Teza, apărută în *lingua franca* a fizicienilor acelor ani, s-a bucurat de circulație internațională și a contribuit la dezvoltarea unor subiecte importante, cum ar fi efectul Șubnikov - de Haas, magnetorezistivitatea transversală sau conductivitatea prin hopping. Totodată, prin activitatea sa științifică și didactică de aproape o jumătate de veac, Țițeica a reușit să definească un standard înalt al înțelegerii fizicii pentru mai multe generații de cercetători din România.

ISBN 978-606-94603-1-3